

Ogólne równanie krzywej przejściowej dla rampy przechyłkowej w postaci wielomianu nieparzystego stopnia

The general equation of the transition curve for a superelevation ramp in the form of an odd-degree polynomial



Robert Wojtczak

Mgr inż.

COWI Polska Sp. z o. o.

robert.wojtczak@wp.pl

Streszczenie: W artykule przedstawiono uproszczone rozwiązanie ogólnego równania krzywizny i współrzędnych krzywych przejściowych odpowiadających rampom przechyłkowym opisanym wielomianem o dowolnym nieparzystym stopniu, jak i podano rozwiązanie ścisłe. Zestawiono szczegółowe równania tych funkcji dla kolejnych stopni od 1 do 15, co umożliwia ich praktyczne zastosowanie, wzajemne porównanie oraz wykorzystanie w dalszych pracach teoretycznych. Przedstawienie całej rodziny krzywych przejściowych za pomocą jednego, uniwersalnego wzoru — wcześniej niewykorzystywanego — może stanowić użyteczne narzędzie do badań nad optymalizacją ramp przechyłkowych i krzywych przejściowych o zadanych własnościach.

Słowa kluczowe: Rampa przechyłkowa; Rampa wielomianowa; Krzywa przejściowa; Geometria toru kolejowego

Abstract: The article presents both a simplified solution to the general curvature and coordinates equations of transition curves corresponding to cant ramps described by a polynomial of any odd degree, as well as the exact solution. Detailed equations of these functions are provided for degrees from 1 to 15, enabling their practical application, mutual comparison, and use in further theoretical work. Describing the entire family of transition curves using a single, universal formula—previously not employed—may serve as a valuable tool for research on the optimization of cant ramps and transition curves with prescribed properties.

Keywords: Superelevation ramp; Polynomial ramp; Transition curve; Railway track geometry

Wstęp

Rampy przechyłkowe i krzywe przejściowe to bardzo ważne, najbardziej skomplikowane elementy geometrii toru kolejowego. Na przestrzeni lat opracowano wiele rozwiązań ramp przechyłkowych i krzywych przejściowych o różnych własnościach geometrycznych i kinematycznych. Między innymi, temat ramp przechyłkowych i krzywych przejściowych podnoszony był w pracach [1], [2], [3], [4], [5]. Szczególną grupą wśród ramp przechyłkowych są rampy wielomianowe o nieparzystych stopniach. W artykule [6] wykazano, że wszystkie rampy przechyłkowe w postaci wielomianu nieparzystego stopnia są związane ogólnym wzorem, w którym jedynym parametrem jest stopień wielomianu k :

$$f_k(\xi) = \sum_{i=\frac{k+1}{2}}^k (-1)^{i-\frac{k+1}{2}} \cdot \frac{k!}{i \cdot (k-i)! \cdot \left(\frac{k-1}{2}\right)! \cdot \left(i - \frac{k+1}{2}\right)!} \cdot \xi^i \quad (1)$$

Podanie uniwersalnego równania dla zdefiniowanej jak wyżej całej rodziny ramp wielomianowych otworzyło możliwość sformułowania ogólnego równania przebiegu (współrzędnych) krzywych przejściowych na płaszczyźnie x - y .

Ogólne równanie krzywych przejściowych

Równanie (1) zostało sprawdzone dla wszystkich mających praktyczne znaczenie przypadków, aż do 19 stopnia funkcji wielomianowej [7]. Wzory na kolejne funkcje kształtu (funkcje bazowe) ramp przechyłkowych prezentują się następująco:

łatwo zauważyć z tabeli 1, że kolej-

ne funkcje odpowiadają odpowiednio: rampie liniowej (stopień 1), rampie Blossa (stopień 3), rampie Wątoroka (stopień 5), rampie HHMP7 Hasslingera (stopień 7) oraz rampie HHMP9 Hasslingera (stopień 9) [6]. Rampy wyższych stopni nie zostały dotąd wyczerpująco opisane w literaturze, ponieważ nie mają praktycznego znaczenia.

Podstawiając do równania (1) za ξ wyrażenie s/L , gdzie s oznacza aktualną długość wzdłuż rampy, a L całkowitą długość rampy, wyrażenie przyjmie następującą postać:

$$f_k(s) = \sum_{i=\frac{k+1}{2}}^k (-1)^{i-\frac{k+1}{2}} \cdot \frac{k!}{i \cdot (k-i)! \cdot \left(\frac{k-1}{2}\right)! \cdot \left(i - \frac{k+1}{2}\right)!} \cdot \frac{s^i}{L^i} \quad (2)$$

Istnieją dwie metody wyznaczenia współrzędnych funkcji krzywej przejściowej. Pierwsza polega na wykorzystaniu zdefiniowanych funkcji $y(x)$, a druga

Tab. 1. Funkcje kształtu kolejnych wielomianowych ramp przechyłkowych

Rampa st. 1-ego:	$f(\xi)=$	1ξ
Rampa st. 3-ego:	$f(\xi)=$	$3\xi^2 - 2\xi^3$
Rampa st. 5-ego:	$f(\xi)=$	$10\xi^3 - 15\xi^4 + 6\xi^5$
Rampa st. 7-ego:	$f(\xi)=$	$35\xi^4 - 84\xi^5 + 70\xi^6 - 20\xi^7$
Rampa st. 9-ego:	$f(\xi)=$	$126\xi^5 - 420\xi^6 + 540\xi^7 - 315\xi^8 + 70\xi^9$
Rampa st. 11-ego:	$f(\xi)=$	$462\xi^6 - 1980\xi^7 + 3465\xi^8 - 3080\xi^9 + 1386\xi^{10} - 252\xi^{11}$
Rampa st. 13-ego:	$f(\xi)=$	$1716\xi^7 - 9009\xi^8 + 20020\xi^9 - 24024\xi^{10} + 16380\xi^{11} - 6006\xi^{12} + 924\xi^{13}$
Rampa st. 15-ego:	$f(\xi)=$	$6435\xi^8 - 40040\xi^9 + 108108\xi^{10} - 163800\xi^{11} + 150150\xi^{12} - 83160\xi^{13} + 25740\xi^{14} - 3432\xi^{15}$
Rampa st. 17-ego:	$f(\xi)=$	$24310\xi^9 - 175032\xi^{10} + 556920\xi^{11} - 1021020\xi^{12} + 1178100\xi^{13} - 875160\xi^{14} + 408408\xi^{15} - 109395\xi^{16} + 12870\xi^{17}$
Rampa st. 19-ego:	$f(\xi)=$	$92378\xi^{10} - 755820\xi^{11} + 2771340\xi^{12} - 5969040\xi^{13} + 8314020\xi^{14} - 7759752\xi^{15} + 4849845\xi^{16} - 1956240\xi^{17} + 461890\xi^{18} - 48620\xi^{19}$

na obliczeniu współrzędnych z równań parametrycznych $y(s)$ i $x(s)$. W artykule przedstawiono uogólnione równania krzywych przejściowych przy wykorzystaniu każdej z metod.

Równanie krzywej przejściowej w postaci $y(x)$

Mając ogólny wzór na rampy przechyłkowe, można w zwięzły sposób opisać krzywe przejściowe odpowiadające tym rampom. Krzywizna dowolnej funkcji na płaszczyźnie x - y wyliczana jest ze znanego wzoru:

$$\kappa(x) = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (3)$$

Krywizna funkcji opisującej krzywą przejściową zmienia się zgodnie z funkcją kształtu rampy przechyłkowej wzdłuż długości s , a nie bezpośrednio wzdłuż x . Jako że stosowane w praktyce krzywe przejściowe wykazują niewielkie wartości kąta stycznej do osi X , uzasadnione jest zastosowanie uproszczenia poprzez pominięcie mianownika we wzorze (3), ponieważ jego wartość jest w praktycznych przypadkach równa w przybliżeniu 1. Zatem wzór (3) można uprościć do postaci:

$$\kappa(x) \cong \frac{d^2y}{dx^2} \quad (4)$$

Tak przedstawione rozwiązanie jest nadal obecne w literaturze światowej oraz w wytycznych projektowania obowiązujących w różnych krajach. Wiedząc, że krzywizna krzywej przejściowej jest opisywana przez funkcję kształtu rampy przechyłkowej, podzieloną przez wartość promienia tej funkcji na jej końcu,

podstawiając ogólne równanie funkcji kształtu wielomianowej rampy przechyłkowej, dostajemy:

$$\kappa(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{R} \cdot \sum_{i=\frac{k+1}{2}}^k (-1)^{i-\frac{k+1}{2}} \cdot \frac{k!}{i \cdot (k-i)! \cdot \left(\frac{k-1}{2}\right)! \cdot \left(i-\frac{k+1}{2}\right)!} \cdot \frac{x^i}{L^i} \quad (5)$$

A przy zadanej krzywiznie początkowej $K_1 = 1/R_1$ i krzywiznie końcowej

$$\kappa(x) = K_1 + (K_2 - K_1) \cdot \sum_{i=\frac{k+1}{2}}^k (-1)^{i-\frac{k+1}{2}} \cdot \frac{k!}{i \cdot (k-i)! \cdot \left(\frac{k-1}{2}\right)! \cdot \left(i-\frac{k+1}{2}\right)!} \cdot \frac{x^i}{L^i} \quad (6)$$

Dwukrotne całkowanie wyrażenia (5) przedstawia się następująco:

$$y_k(x) = \frac{1}{R} \cdot \sum_{i=\frac{k+1}{2}}^k (-1)^{i-\frac{k+1}{2}} \cdot \frac{k!}{i \cdot (i+1) \cdot (i+2) \cdot (k-i)! \cdot \left(\frac{k-1}{2}\right)! \cdot \left(i-\frac{k+1}{2}\right)!} \cdot \frac{x^{i+2}}{L^i} + C_1 \cdot x + C_2 \quad (7)$$

Stałe C_1 i C_2 przyjmują wartości zerowe na podstawie warunku zanikania krzywizny funkcji w punkcie $(0,0)$, a także z warunku styczności krzywej do osi X w tym punkcie. W efekcie uproszczony wzór na przebieg dowolnej krzywej przejściowej odpowiadającej rampie przechyłkowej opisanej wielomianem o nieparzystym stopniu k przyjmuje następującą postać:

$$y_k(x) = \frac{1}{R} \cdot \sum_{i=\frac{k+1}{2}}^k (-1)^{i-\frac{k+1}{2}} \cdot \frac{k!}{i \cdot (i+1) \cdot (i+2) \cdot (k-i)! \cdot \left(\frac{k-1}{2}\right)! \cdot \left(i-\frac{k+1}{2}\right)!} \cdot \frac{x^{i+2}}{L^i} \quad (8)$$

Tak sformułowany problem zwraca następujące wzory opisujące współrzędne (x,y) kolejnych funkcji krzywych przejściowych, od stopnia 1. do 15.

Powyższe wzory odpowiadają kolejno krzywym przejściowym: znanym z literatury parabolicznej krzywej 3. stopnia oraz krzywej Blossa, krzywej przejściowej dla rampy Wątoroka, dwóm krzywym odpowiadającym rampom Hasslingera oraz trzem kolejnym krzywymi, które najprawdopodobniej nie były dotąd opisywane w literaturze. Należy zaznaczyć, że krzywizna krzywych przejściowych dla ramp 7. i 9. stopnia została przez Hasslingera zdefiniowana w sposób nieco odmienny [8]; jednak dla zachowania spójności przedstawiono rozwiązania wynikające bezpośrednio ze wzoru (8).

Równanie krzywej przejściowej w postaci parametrycznej

Drugi sposób określenia przebiegu krzywych przejściowych to wyznaczenie w ścisły sposób współrzędnych funkcji w sposób parametryczny. Dla przejrzystości, można zapisać współczynnik liczbowy ze wzoru (2), zależny tylko od k oraz i , jako A_i . Można też chwilowo pominąć dokładne wartości dolne i górne sumowania. Mamy zatem:

$$f_k(s) = \sum_i A_i \frac{s^i}{L^i} \quad (9)$$

Zdefiniujmy krzywiznę jako pochodną kąta nachylenia stycznej w punkcie funkcji:

$$\kappa(s) = \frac{d\theta}{ds} \quad (10)$$

Zatem wartość funkcji kąta wyraża wzór:

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(s) ds = \int_0^s \left(\sum_i A_i \frac{s^i}{L^i} \right) ds =$$

$$= \sum_i A_i \frac{1}{L^i} \int_0^s s^i ds = \sum_i A_i \frac{s^{i+1}}{(i+1)L^i} \quad (11)$$

Ostatecznie, ogólne równanie funkcji kąta stycznej rodziny krzywych przejściowych odpowiadających wielomianowym rampom przechyłkowych o nieparzystych stopniach k określone zostało wzorem (12).

$$\theta(s) = \sum_{i=\frac{k+1}{2}}^k (-1)^{i-\frac{k+1}{2}} \cdot \frac{k!}{i \cdot (i+1) \cdot (k-i)! \cdot \left(\frac{k-1}{2}\right)! \cdot \left(i-\frac{k+1}{2}\right)!} \cdot \frac{s^{i+1}}{L^i} \quad (12)$$

Z klasycznego układu Freneta mamy:

$$x_k'(s) = \cos \theta(s); \quad y_k'(s) = \sin \theta(s) \quad (13)$$

Po operacji integrowania otrzymujemy ostateczne, nieupraszczalne wzory (14-15) na współrzędne (x,y) krzywych przejściowych zaczynających się w punkcie (x_0, y_0) . W odróżnieniu od wzoru (8), są to już dokładne równania, które należy stosować przy projektowaniu krzywych przejściowych.

$$x_k(s) = x_0 + \int_0^s \cos \left(\sum_{i=\frac{k+1}{2}}^k (-1)^{i-\frac{k+1}{2}} \cdot \frac{k!}{i \cdot (i+1) \cdot (k-i)! \cdot \left(\frac{k-1}{2}\right)! \cdot \left(i-\frac{k+1}{2}\right)!} \cdot \frac{s^{i+1}}{L^i} \right) ds \quad (14)$$

$$y_k(s) = y_0 + \int_0^s \sin \left(\sum_{i=\frac{k+1}{2}}^k (-1)^{i-\frac{k+1}{2}} \cdot \frac{k!}{i \cdot (i+1) \cdot (k-i)! \cdot \left(\frac{k-1}{2}\right)! \cdot \left(i-\frac{k+1}{2}\right)!} \cdot \frac{s^{i+1}}{L^i} \right) ds \quad (15)$$

Powyższych wzorów nie da się zapisać bez operatorów całkowania. Jest to spowodowane funkcjami wielomianowymi wewnątrz funkcji trygonometrycznych i nie istnieją zamknięte formy analityczne takich wyrażeń.

Równania całkowite w praktyce obliczane są z dużą dokładnością metodami numerycznymi lub poprzez rozwinięcie funkcji podcałkowych w szereg, a następnie obliczenie ich postaci analitycz-

nej. Dokładność tego podejścia wiąże się z przyjęciem do obliczeń odpowiedniej liczby wyrazów rozwinięcia szeregu. Obydwie metody dają w rezultacie dokładności w zupełności wystarczające do zastosowań inżynierskich.

Podsumowanie

W niniejszej pracy, wykorzystując ogólne równanie funkcji kształtu ramp przechyłkowych zapisanych w postaci wielomianów o nieparzystych stopniach, wyprowadzono uproszczone ogólne równanie krzywizny krzywych przejściowych odpowiadających tym rampom (5), a także uproszczone ogólne równanie tych krzywych na płaszczyźnie $x-y$ (8). Uproszczenie to może znaleźć zastosowanie w pracach koncepcyjnych lub w sytuacjach, gdy nie są dostępne zaawansowane narzędzia obliczeniowe do wyznaczania współrzędnych krzywych przejściowych. Na przykład, z uproszczonego wzoru, dla rampy liniowej otrzymuje się funkcję będącą parabolą trzeciego stopnia, mimo że funkcją bardziej właściwą jest kłotoidea. Następnie, korzystając z wyprowadzonego wzoru na rodzinę krzywych przejściowych odpowiadających rodzinie wielomianowych ramp przechyłkowych o nieparzystych stopniach, wyznaczono współczynniki kolejnych funkcji i przedstawiono ich kompletne postacie analityczne (tabela 2).

Podano też wzory ściśle określające przebieg kąta nachylenia stycznej do krzywej przejściowej (12) i współrzędne funkcji rodziny krzywych przejściowych w postaci parametrycznej (14-15). Te wzory są właściwymi do używania w projektowaniu układów geometrycz-

nych torów. Z powodów opisanych w niniejszej pracy, nie mogą mieć jednak zamkniętej formy algebraicznej, pomijając operatory całkowania.

Autor ma nadzieję, że w środowisku naukowym będą prowadzone dalsze badania nad geometrią i właściwościami kinematycznymi ramp przechyłkowych oraz odpowiadających im krzywych przejściowych. ◀

Materiały źródłowe

- [1] Hasslinger H.: Measurement proof for the superiority of a new track alignment design element, the so-called "Viennese Curve."
- [2] Koc W.: Analytical Method of Modeling the Geometric System of Communication Route.
- [3] Mieloszyk E. & Koc W.: General dynamic method for determination transition curve equations.
- [4] Zboiński K, Woźnica P.: Formation of polynomial railway transition curves of even degrees.
- [5] Chrostowski P.: Wielokryterialne wspomaganie projektowania układów geometrycznych modernizowanych linii kolejowych.
- [6] Wojtczak R.: Ogólne równanie rampy przechyłkowej w postaci wielomianu nieparzystego stopnia.
- [7] Wojtczak R.: Ogólne równanie rampy przechyłkowej w postaci wielomianu nieparzystego stopnia – prezentacja multimedialna, Konferencja Drogi Kolejowe 2026.
- [8] Wojtczak R.: Charakterystyka krzywej przejściowej Wiener Bogen®.

Tab. 2. Funkcje kolejnych krzywych przejściowych

$$y_1(x) = \frac{x^3}{6RL}$$

$$y_3(x) = \frac{1}{R} \left(\frac{x^4}{4L^2} - \frac{x^5}{10L^3} \right)$$

$$y_5(x) = \frac{1}{R} \left(\frac{x^5}{2L^3} - \frac{x^6}{2L^4} + \frac{x^7}{7L^5} \right)$$

$$y_7(x) = \frac{1}{R} \left(\frac{x^6}{6L^4} - \frac{2x^7}{L^5} + \frac{5x^8}{4L^6} - \frac{5x^9}{18L^7} \right)$$

$$y_9(x) = \frac{1}{R} \left(\frac{3x^7}{L^5} - \frac{15x^8}{2L^6} + \frac{15x^9}{2L^7} - \frac{7x^{10}}{2L^8} + \frac{7x^{11}}{11L^9} \right)$$

$$y_{11}(x) = \frac{1}{R} \left(\frac{33x^8}{4L^6} - \frac{55x^9}{2L^7} + \frac{77x^{10}}{2L^8} - \frac{28x^{11}}{L^9} + \frac{21x^{12}}{2L^{10}} - \frac{21x^{13}}{13L^{11}} \right)$$

$$y_{13}(x) = \frac{1}{R} \left(\frac{143x^9}{6L^7} - \frac{1001x^{10}}{10L^8} + \frac{182x^{11}}{L^9} - \frac{182x^{12}}{L^{10}} + \frac{105x^{13}}{L^{11}} - \frac{33x^{14}}{L^{12}} + \frac{44x^{15}}{10L^{13}} \right)$$

$$y_{15}(x) = \frac{1}{R} \left(\frac{143x^{10}}{2L^8} - \frac{364x^{11}}{L^9} + \frac{819x^{12}}{L^{10}} - \frac{1050x^{13}}{L^{11}} + \frac{825x^{14}}{L^{12}} - \frac{396x^{15}}{L^{13}} + \frac{429x^{16}}{4L^{14}} - \frac{429x^{17}}{34L^{15}} \right)$$