

Ogólne równanie rampy przechyłkowej w postaci wielomianu nieparzystego stopnia

The general equation of the superelevation ramp in the form of an odd-degree polynomial



Robert Wojtczak

Mgr inż.

COWI Polska Sp. z o. o.

rowo@cowi.com

Streszczenie: W artykule przedstawiono rozwiązanie ogólnego równania rampy przechyłkowej w postaci wielomianu o dowolnym, nieparzystym stopniu, co stanowi podstawę do analizy i projektowania bardziej zaawansowanych profili ramp w infrastrukturze kolejowej. Zaprezentowano wygodną i uniwersalną metodę wyznaczania funkcji wielomianowych dowolnych stopni oraz zestawiono szczegółowe równania tych funkcji dla stopni od 1 do 15, umożliwiając ich praktyczne zastosowanie i porównanie. Wykazano, że zarówno popularna rampa liniowa, jak i rampa Blossa, rampa Wątoroka oraz rampy Hasslingera są szczególnymi przypadkami jednej rodziny ramp przechyłkowych opisanych wielomianami stopnia nieparzystego. Takie ujęcie pozwala na ich opisanie wspólnym, uniwersalnym wzorem, który może służyć jako narzędzie do dalszych badań i optymalizacji ramp przechyłkowych o zadanych własnościach.

Słowa kluczowe: Rampa przechyłkowa; Rampa wielomianowa; Geometria toru kolejowego

Abstract: This article presents a solution to the general equation of a railway cant ramp in the form of an arbitrary odd-degree polynomial, providing a foundation for the analysis and design of advanced ramp profiles within railway infrastructure. The paper introduces a convenient and universal method for determining polynomial functions of any odd degree and provides explicit equations for these functions ranging from degree 1 to 15, facilitating practical application and comparison. It is demonstrated that the commonly used linear ramp, as well as the Bloss, Wątorok, and Hasslinger ramps, are particular cases within a single family of cant ramps described by odd-degree polynomials. This unified approach enables all such ramps to be expressed using a common, general formula, which can serve as a powerful tool for further research and optimization of railway cant ramps with desired characteristics.

Keywords: Superelevation ramp; Polynomial ramp; Railway track geometry

Wstęp

Rampy przechyłkowe stanowią istotny element infrastruktury kolejowej. Pomimo iż – głównie z powodów historycznych – w praktyce stosuje się niemal wyłącznie najprostszą, a zarazem najmniej korzystną z punktu widzenia kinematyki rampę liniową, nadal prowadzone są badania teoretyczne nad opracowywaniem lepszych funkcji opisujących przebieg rampy [1, 2].

Rampa przechyłkowa powinna zapewniać bezpieczną zmianę przechyłki pomiędzy odcinkami o różnych jej wartościach. Ogólne równanie rampy przechyłkowej można przedstawić wzorem (1) jako sumę wartości przechyłki początkowej D_1 i iloczynu różnicy przechyłki końcowej D_2 i początkowej D_1 oraz odpowiednio dobranej funkcji bazowej $f(x)$, która zmienia się płynnie

w zakresie od zera (na początku rampy) do jedności (na końcu rampy). W najczęstszym przypadku, gdy przechyłka zmienia się od zera to pewnej wartości, wzór ten zredukuje się do iloczynu docelowej wartości przechyłki D oraz funkcji bazowej $f(x)$ – wzór (2).

$$D(x) = D_1 + (D_2 - D_1) \cdot f(x) \quad (1)$$

$$D(x) = D \cdot f(x) \quad (2)$$

W niniejszym artykule skupiono się na funkcjach wielomianowych o stopniach nieparzystych, które wybierane są ze względu na symetrię warunków brzegowych. Wielomiany te pozwalają na wyzerowanie kolejnych pochodnych na końcach analizowanego przedziału, co jest niemożliwe w przypadku wielomianów stopnia parzystego bez dodatkowych modyfikacji. Należy jed-

nak zaznaczyć, że również rampy wielomianowe stopnia parzystego są przedmiotem badań—przykładem może być rampa szóstego stopnia opracowana przez Mieloszyka i Koca [3].

Analiza funkcji wielomianowej nieparzystego stopnia k

Równanie rampy przechyłkowej opisanej wielomianem stopnia k , gdzie k jest liczbą nieparzystą, przy zadanej długości rampy L , można przedstawić w następującej postaci:

$$f_k(\xi) = A_0 + A_1 \cdot \xi + A_2 \cdot \xi^2 + \dots + A_k \cdot \xi^k \quad (3)$$

gdzie $A_0, A_1, \dots, A_k$ to współczynniki liczbowo określające wielomian, a ξ to znormalizowana współrzędna długości rampy, dana jako:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (4)$$

Wyrażenie (3) można również zapisać w postaci zwężonej sumy skończonej:

$$f_k(\xi) = \sum_{i=0}^k A_i \cdot \xi^i \quad (5)$$

W powyższych równaniach występują łącznie $(k + 1)$ niewiadomych współczynników A_i . Jednak połowę tych współczynników można wyznaczyć (lub wyeliminować), narzucając warunki zerowania się funkcji oraz jej kolejnych pochodnych w punkcie $\xi=0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_k(0) = 0 \Rightarrow A_0 = 0 \\ \frac{df_k}{d\xi}(0) = 0 \Rightarrow A_1 = 0 \\ \dots \\ \frac{d^p f_k}{d\xi^p}(0) = 0 \Rightarrow A_p = 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

Uzyskane w ten sposób warunki pozwalają wyeliminować współczynniki do rzędu p , gdzie p obliczamy ze wzoru (7). Liczba r według wzoru (8) oznacza numer kolejnego niezerowego wyrazu wielomianu, licząc od funkcji liniowej w górę.

$$p = \frac{k-1}{2} \quad (7)$$

$$r = p + 1 = \frac{k+1}{2} \quad (8)$$

Równanie (5) upraszcza się więc do postaci:

$$f_k(\xi) = \sum_{i=r}^k A_i \cdot \xi^i \quad (9)$$

Pozostałe współczynniki A_i wyznacza się, nakładając warunki zerowania kolejnych pochodnych w punkcie $\xi=1$ oraz wymuszając wartości funkcji równej 1 dla końcowej rzędnej rampy. Kolejne pochodne funkcji mają postać:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_k(\xi) = \sum_{i=r}^k A_i \cdot \xi^i \\ \frac{df_k}{d\xi}(\xi) = \sum_{i=r}^k A_i \cdot \xi^{i-1} \\ \dots \\ \frac{d^p f_k}{d\xi^p}(\xi) = \sum_{i=r}^k i \cdot (i-1) \cdot \dots \cdot (i-(p-1)) \cdot A_i \cdot \xi^{i-p} \end{array} \right. \quad (10)$$

Iloczyn $i \cdot (i-1) \cdot \dots \cdot (i-p+1)$ można wygodnie zapisać jako:

$$i \cdot (i-1) \cdot \dots \cdot (i-p+1) = \frac{i!}{(i-p)!} \quad (11)$$

Zatem pochodna rzędu p funkcji wielomianowej stopnia k ma postać:

$$\frac{d^p f_k}{d\xi^p}(\xi) = \sum_{i=r}^k \frac{i!}{(i-p)!} \cdot A_i \cdot \xi^{i-p} \quad (12)$$

Podstawiając $\xi=1$ oraz uwzględniając warunki brzegowe, otrzymujemy ogólny wzór zerowych sum:

$$\sum_{i=r}^k \frac{i!}{(i-p)!} \cdot A_i = 0 \quad (13)$$

Aby wyliczyć pozostałe nieznanne współczynniki, należy rozwiązać układ $(p+1)$ równań (jedno równanie warunków brzegowych funkcji oraz p równań warunków brzegowych kolejnych pochodnych funkcji:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=r}^k A_i = 1 \\ \sum_{i=r}^k \frac{i!}{(i-1)!} \cdot A_i = 0 \\ \dots \\ \sum_{i=r}^k \frac{i!}{(i-p)!} \cdot A_i = 0 \end{array} \right. \quad (14)$$

Rozwiązanie tego układu równań sprowadza się do wyznaczenia niewiadomych na drodze przekształceń macierzowych. Macierz główna układu dla stopnia r , wraz z macierzą wyrazów wolnych, można zapisać w sposób ogólny jako:

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ r & r+1 & r+2 & \dots & k \\ \frac{r!}{(r-2)!} & \frac{(r+1)!}{(r-1)!} & \dots & \dots & \frac{k!}{(k-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{r!}{1!} & \frac{(r+1)!}{2!} & \dots & \dots & \frac{k!}{r!} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{array} \right] \quad (15)$$

Powyższą macierz można zapisać w postaci pokazującej schemat występujący w wartościach jej elementów oraz wykorzystując tylko jedną zmienną, w tym przypadku zdecydowano się na zmienną r :

$$\left[\begin{array}{cccccc} \frac{r!}{r!} & \frac{(r+1)!}{(r+1)!} & \frac{(r+2)!}{(r+2)!} & \dots & \frac{(2r-1)!}{(2r-1)!} \\ \frac{r!}{(r-1)!} & \frac{(r+1)!}{(r-1)!} & \frac{(r+2)!}{(r+1)!} & \dots & \frac{(2r-1)!}{(2r-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{r!}{(r-2)!} & \frac{(r+1)!}{(r-1)!} & \dots & \dots & \frac{(2r-1)!}{(2r-3)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{r!}{1!} & \frac{(r+1)!}{2!} & \dots & \dots & \frac{(2r-1)!}{r!} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{array} \right] \quad (16)$$

Prawidłowość, która się pojawia można wykorzystać do określenia wartości dowolnego elementu leżącego w rzędzie m i kolumnie n :

$$a_{m,n} = \frac{(r+n-1)!}{(r-m+n)!} \quad (17)$$

Również macierz dołączoną reprezentującą wyniki warunków brzegowych można przedstawić w zwężonej formie, gdzie nawias kwadratowy oznacza część całkowitą (cechę) liczby:

$$\omega_m = \begin{cases} 1 & \text{dla } m = 1 \\ 0 & \text{dla } m > 1 \end{cases} = \left\lfloor \frac{1}{m} \right\rfloor \quad (18)$$

Zaczynając od macierzy jednoelementowej (odpowiadającej rampie liniowej) i rozszerzając ją zgodnie ze wzorem (17) poza jej zakres, otrzymuje się tablicę (tabela 1), w której można odszukać zestaw współczynników niezbędnych do rozwiązania krzywej wielomianowej o zadanym stopniu.

Wyliczone ze wzoru (17), bądź odśzukane w tabeli 1, wartości tworzą macierz R . Ponieważ macierz dołączona posiada jedynekę w pierwszym wierszu i zera w pozostałych, rozwiązanie układu równań (14) – reprezentowanego przez kwadratową macierz główną o wymiarze r i odpowiadającą jej macierz dołączoną (16) – stanowią elementy $b_{i,1}$ pierwszej kolumny macierzy odwrotnej do R . Elementy te tworzą macierz współczynników wielomianu stopnia k :

$$A^{(k)} = [b_{1,1} \ b_{2,1} \ \dots \ b_{r,1}] \quad (19)$$

Poszczególne współczynniki funkcji wielomianowej stopnia k można przedstawić za pomocą wzoru (20), natomiast równanie funkcji wielomianowej za pomocą wzoru (21). We wzorach tych $R_{a,b}^T$ oznacza odpowiednią transponowaną macierz dopełnień algebraicznych.

$$A_{j+r-1} = b_{j,1} = \frac{R_{j,1}^T}{\det(R)} \quad (20)$$

$$f_k(\xi) = \sum_{i=r}^k A_i \cdot \xi^i = \sum_{i=r}^k b_{i-r+1,1} \cdot \xi^i = \sum_{i=r}^k \frac{R_{i-r+1,1}^T}{\det(R)} \cdot \xi^i \quad (21)$$

Dalsze przekształcanie funkcji (21) i wyrażenie wartości współczynnika A_i jedynie za pomocą r lub k jest teoretycznie możliwe, lecz praktycznie bardzo uciążliwe. Znacznie wygodniejszym podejściem jest rozwiązanie układu (16)

jedną z wielu metod rozwiązywania macierzy ze wspomaganie komputeryjnym. Wyznaczenie ogólnego wzoru na szukane współczynniki może zostać ułatwione dzięki zastosowaniu sztucznej inteligencji, szczególnie po uprzednim ich numerycznym wyznaczeniu.

Rozwiązania dla kolejnych funkcji wielomianowych

Wyznaczenie współczynników szukanej funkcji wielomianowej zadanego stopnia polega na rozwiązaniu układu równań utworzonego z macierzy głównej oraz macierzy wyrazów wolnych. Obliczeń dokonano za pomocą algorytmu komputerowego on-line [6], wykorzystując metodę macierzy odwrotnej. Tabela 2 przedstawia zestawienie wyznaczonych funkcji wielomianowych ramp przechyłkowych o kolejnych nieparzystych stopniach k . Każdy wiersz odpowiada rozwiązaniu uzyskanemu zgodnie z opisanymi wcześniej warunkami brzegowymi i układem macierzowym. Z kolei tabela 3 grupuje wartości współczynników liczbowych stojących przy kolejnych potęgach ξ w poszczególnych funkcjach.

Znając już wartości współczynników liczbowych, możliwe jest wyznaczenie ogólnego wzoru opisującego ich rozmieszczenie, na przykład z wykorzystaniem algorytmów sztucznej inteligencji. W niniejszej pracy posłużono się modelem GPT-4.1, który przeszukał zasoby internetowe dotyczące sklasyfikowanych ciągów liczbowych oraz wykorzystał źródła [7], [8], [9], [10]. Po wielu próbach doboru pojedynczej funkcji opisującej cały zbiór, trójkąt liczbowy — przedstawiony w tabeli 2 — został wyrażony ogólną formułą podaną w równaniu (22). Podany wzór został zweryfikowany dla funkcji wielomianowej stopnia 15, dając prawidłowe wyniki. Nie ma jednak pewności, że poniższa formuła jest poprawna dla wielomianów wyższych stopni. Stosowanie ramp przechyłkowych w postaci wielomianów o stopniach wyższych niż 11 wydaje się natomiast wątpliwe z praktycznego punktu widzenia.

$$T(n, s) = (-1)^s \cdot \frac{(2n+1)!}{(n+s+1) \cdot (n-s)! \cdot n! \cdot s!} \quad (22)$$

W rezultacie ogólny wzór na rampę przechyłkową w postaci wielomianu nieparzystego stopnia k można przedstawić w postaci algebraicznej zależnej wyłącznie od stopnia wielomianu:

$$f_k(\xi) = \sum_{i=\frac{k+1}{2}}^k T\left(\frac{k+1}{2}-1, i-\frac{k+1}{2}\right) \cdot \xi^i = \sum_{i=\frac{k+1}{2}}^k T\left(\frac{k-1}{2}, i-\frac{k+1}{2}\right) \cdot \xi^i \quad (23)$$

Należy jeszcze w równaniu (22) zastąpić wyrażenia związane z n oraz s (wzory (24)–(29)) odpowiednimi wyrażeniami w zależności od stopnia wielomianu k oraz kolejnej iteracji i .

$$n = \frac{k-1}{2} \quad (24)$$

$$s = i - \frac{k+1}{2} \quad (25)$$

$$2 \cdot n + 1 = 2 \cdot \frac{k-1}{2} + 1 = k \quad (26)$$

$$n + s = \frac{k-1}{2} + i - \frac{k+1}{2} = i - 1 \quad (27)$$

$$n - s = \frac{k-1}{2} - i + \frac{k+1}{2} = k - i \quad (28)$$

$$n + s + 1 = i - 1 + 1 = i \quad (29)$$

Wówczas ostatecznie wzór przyjmie następującą postać:

$$f_k(\xi) = \sum_{i=\frac{k+1}{2}}^k (-1)^{i-\frac{k+1}{2}} \cdot \frac{k!}{i \cdot (k-i)! \cdot \left(\frac{k-1}{2}\right)! \cdot \left(i-\frac{k+1}{2}\right)!} \cdot \xi^i \quad (30)$$

Sprawdzenie przypadku rampy piątego stopnia (tzw. rampy Wątoraka):

$$f_5(\xi) = (-1)^0 \cdot \frac{5!}{3 \cdot 2! \cdot 2! \cdot 0!} \cdot \xi^3 + (-1)^1 \cdot \frac{5!}{4 \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1!} \cdot \xi^4 + (-1)^2 \cdot \frac{5!}{5 \cdot 0! \cdot 2! \cdot 2!} \cdot \xi^5 = \frac{120}{12} \cdot \xi^3 - \frac{120}{8} \cdot \xi^4 + \frac{120}{20} \cdot \xi^5 = 10\xi^3 - 15\xi^4 + 6\xi^5 \quad (31)$$

Wyniki przeprowadzonej weryfikacji potwierdzają, że wzór (30) stanowi po-

Tab. 1. Uogólniona tablica elementów macierzy głównej

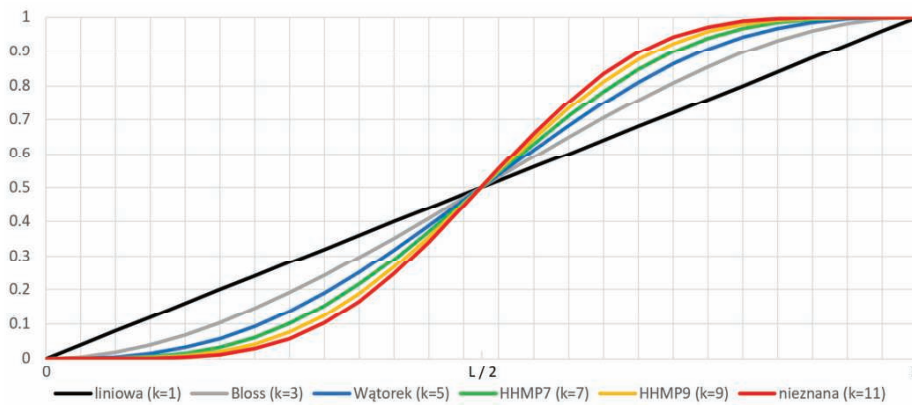
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1														
2	2	1													
3	6	3	1												
4	24	12	4	1											
5	120	60	20	6	1										
6	720	360	120	36	12	1									
7	5040	2520	840	252	84	24	1								
8	40320	20160	6720	2016	672	210	42	1							

Tab. 2. Funkcje wielomianowe kolejnych nieparzystych stopni

k	r	$f_k(\xi)$	uwaga
1	1	ξ	funkcja liniowa
3	2	$3\xi^2 - 2\xi^3$	f. paraboliczna (Blossa)
5	3	$10\xi^3 - 15\xi^4 + 6\xi^5$	rampa Wątoraka
7	4	$35\xi^4 - 84\xi^5 + 70\xi^6 - 20\xi^7$	HHMP7 Hasslingera
9	5	$126\xi^5 - 420\xi^6 + 540\xi^7 - 315\xi^8 + 70\xi^9$	HHMP9 Hasslingera
11	6	$462\xi^6 - 1980\xi^7 + 3465\xi^8 - 3080\xi^9 + 1386\xi^{10} - 252\xi^{11}$	szerzej nieopisana
13	7	$1716\xi^7 - 9009\xi^8 + 20020\xi^9 - 24024\xi^{10} + 16380\xi^{11} - 6006\xi^{12} + 924\xi^{13}$	szerzej nieopisana
15	8	$6435\xi^8 - 40040\xi^9 + 108108\xi^{10} - 163800\xi^{11} + 150150\xi^{12} - 83160\xi^{13} + 25740\xi^{14} - 3432\xi^{15}$	szerzej nieopisana

Tab. 3. Współczynniki liczbowe kolejnych funkcji wielomianowych

		s							
		0	1	2	3	4	5	6	7
n=r-1	0	1							
	1	3	-2						
	2	10	-15	6					
	3	35	-84	70	-20				
	4	126	-420	540	-315	70			
	5	462	-1980	3465	-3080	1386	-252		
	6	1716	-9009	20020	-24024	16380	-6006	924	
	7	6435	-40040	108108	-163800	150150	-83160	25740	-3432



1. Porównanie przebiegu ramp przechyłkowych o stopniach 1 do 11

prawne i wygodne narzędzie do opisu dowolnej rampy przechyłkowej o nieparzystym stopniu, gdzie jedynym parametrem definiującym jej kształt jest stopień wielomianu. Rysunek 1 ilustruje przebiegi funkcji wielomianowych opisujących rampy przechyłkowe o nieparzystych stopniach od 1 do 11.

Podsumowanie

Rampa przechyłkowa, jako kluczowy element infrastruktury kolejowej, niezmienne pozostaje przedmiotem zarówno badań teoretycznych [3, 5], jak i praktycznych wdrożeń [2]. Na przestrzeni ostatnich stu pięćdziesięciu lat powstało wiele interesujących rozwiązań (m.in. Vojacec – 1868, Schramm – 1872, Ruch – 1903, Wątołek – 1907, Bloss – 1936, Klein – 1937, Mieloszyk / Koc – 1991, Hasslinger – 2001), z których każde przewyższa liniową rampę przechyłkową pod względem właściwości kinematycznych. Pomimo ewidentnych zalet modeli nieliniowych, to właśnie rampa liniowa wciąż dominuje w praktyce, głównie ze względów historycznych, przyzwyczajęń oraz prostoty wykonania.

W ostatnich latach na szczególną uwagę zasługuje zestaw ramp nieliniowych (w tym rampy wielomianowe siódmego i dziewiątego stopnia) dedykowanych dla krzywej przejściowej wiedeńskiej [1, 4]. Rozwiązania te znacząco poprawiają parametry dynamiczne ruchu pojazdów szynowych poprzez zagwarantowanie zerowania pochodnych funkcji rampy nawet do czwartego rzędu. Wielomiany wyższych stopni (np. większych niż dziewiąty) umożliwiają uzyskanie jeszcze lepszego dopasowania rampy do odcinka pro-

stego i łuku kołowego, dzięki płynnemu wygładzaniu kolejnych pochodnych funkcji bazowej na krańcach przedziału. Wadą tego rozwiązania może być jednak zwiększone nachylenie rampy na odcinku środkowym oraz potencjalne trudności wykonawcze, choć można je częściowo ograniczyć stosując dłuższą rampę przechyłkową.

W niniejszej pracy przedstawiono zwarte, uniwersalne rozwiązanie na ogólną funkcję bazową rampy przechyłkowej w postaci wielomianu o nieparzystym stopniu. Proponowany wzór stanowi wygodne narzędzie do wyznaczania ramp o maksymalnej dla danego stopnia liczbie kolejnych pochodnych zerujących się na końcach przedziału $0 \leq \xi \leq 1$. Przy wyborze odpowiedniej rampy przechyłkowej należy mieć na uwadze ścisły związek z charakterystyką krzywej przejściowej, którego źródłem jest zasada zgodności (wprost proporcjonalności) zmiany krzywizny krzywej przejściowej z przebiegiem funkcji bazowej przechyłki.

W dobie podnoszących się prędkości kolejowych oraz dynamicznego rozwoju technologii projektowania, budowy i utrzymania infrastruktury, wykorzystywanie XIX-wiecznych krzywych przejściowych (takich jak klotoidy czy parabole trzeciego stopnia) w połączeniu z liniowymi rampami przechyłkowymi nie wydaje się już rozwiązaniem optymalnym. Stosowanie ramp o przebiegu sinusoidalnym lub wielomianów wyższych stopni (np. 7. lub 9. stopnia) oraz odpowiadających im krzywych przejściowych, umożliwia osiągnięcie lepszych parametrów technicznych i komfortu jazdy w nowoczesnych warunkach eksploatacji kolei.

Warto również podkreślić, że stosowa-

wanie liniowych ramp przechyłkowych i utrzymanie ich w praktyce jest ściśle rzecz biorąc niemożliwe. Wynika to z faktu, że szyny kolejowe jako elementy ciągłe o określonej sztywności materiałowej zawsze będą wykazywać pewien stopień wyokrąglenia na początku i końcu rampy wskutek wymuszonych sił i momentów zginających. Z tego względu rodzi się pytanie: dlaczego nie projektować ramp przechyłkowych w taki sposób, aby to wyokrąglenie było zamierzone i kontrolowane, na przykład poprzez stosowanie ramp w postaci wielomianów nieparzystych wyższego stopnia niż pierwszy? Autor niniejszego artykułu wyraża nadzieję, że przedstawione rozważania staną się punktem wyjścia do szerokiej dyskusji na temat wad, zalet oraz możliwości technicznych rozpoczęcia praktycznego stosowania ramp przechyłkowych o korzystniejszych właściwościach kinematycznych — podobnie jak ma to miejsce np. w Austrii. ◀

Materiały źródłowe

- [1] AT 412 975 B: Gleis mit Übergangsbogen und Kräfterminimaler Überhöhungsrampe.
- [2] Hasslinger H.: Measurement proof for the superiority of a new track alignment design element, the so-called "Viennese Curve."
- [3] Mieloszyk E. & Koc W.: General dynamic method for determination transition curve equations.
- [4] Wojtczak R.: Charakterystyka krzywej przejściowej Wiener Bogen®.
- [5] Zboiński K, Woźnica P.: Formation of polynomial railway transition curves of even degrees.
- [6] On-line Matrix Calculator: <https://matrixcalc.org>
- [7] The On-line Encyclopedia of Integer Sequences: <https://oeis.org/A040027>
- [8] The On-line Encyclopedia of Integer Sequences: <https://oeis.org/A034867>
- [9] The On-line Encyclopedia of Integer Sequences: <https://oeis.org/A007318>
- [10] The On-line Encyclopedia of Integer Sequences: <https://oeis.org/A097807>