

# Sprężysto-tłumiąca więź kontaktowa w numerycznych symulacjach drgań układu pociąg – tor

## Visco-elastic contact spring in numerical simulations of train – track system vibrations

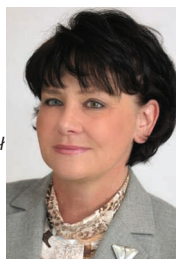


**Piotr Lalewicz**

Mgr inż.

Politechnika Wrocławska, Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Katedra Dróg, Mostów, Kolei i Lotnisk

piotr.lalewicz@pwr.edu.pl



**Danuta Bryja**

Dr hab. inż., prof. uczelni

Politechnika Wrocławska, Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Katedra Dróg, Mostów, Kolei i Lotnisk

danuta.bryja@pwr.edu.pl

**Streszczenie:** W sprzężonym układzie pociąg – tor, kontakt pomiędzy podukładami występuje na styku każdego koła z szyną. Najpopularniejszym obecnie modelem kontaktu stosowanym w symulacjach numerycznych drgań jest idealnie sprężysta, zlinearyzowana więź Hertz'a bazująca na teorii kontaktowej Hertz'a. W bogatszych wariantach modelu kontaktowego uwzględnia się dodatkowo dyssypację energii na styku koła z szyną. W literaturze brakuje porównań tych modeli wskazujących na skutki zastosowania konkretnego rozwiązania. Zasadniczym celem niniejszej pracy jest analiza porównawcza skutków zastosowania dwóch wybranych więzi kontaktowych w symulacjach numerycznych drgań układu pociąg – tor. Rozważono standardową zlinearyzowaną więź sprężystą typu Hertz'a i więź sprężysto-tłumiącą zdefiniowaną przez autorów, bazującą na tłumieniu histerezy. Skutki zastosowania tych więzi kontaktowych zbadano na podstawie porównania wyników symulacji pionowych drgań toru z nierównością progową, przez którą przejeżdża pociąg stanowiący zespół pojazdów kolejowych. Na podstawie wykonanych analiz numerycznych postawiono tezę, że zastosowanie modelu kontaktowego koło – szyna wzbogaconego o tłumienie histerezy jest sensowne wtedy, gdy badania są ukierunkowane na stan wyłączenia toru i efekty zmęczenia w torze i pojeździe kolejowym. Stwierdzono ponadto, że pominięcie tłumienia w strefie kontaktu nieco zaniża prawdopodobieństwo wystąpienia utraty kontaktu, a więc nie prowadzi do prawidłowej identyfikacji tego zjawiska.

**Słowa kluczowe:** Kontakt koło/szyna; Kontakt Hertza, Zlinearyzowane więzi kontaktowe; Dynamika układów pociąg/tor

**Abstract:** In train – track coupled systems, interaction between subsystems occurs in wheel-rail contact. The most common contact model is perfectly elastic, linearized Hert'z spring. It has wide range of application in numerical simulations. In more detailed interaction models, the energy dissipation in wheel-rail contact is taken into account. There are no known comparisons of these models in the literature, that would indicate the effects of a specific solution application.

In this paper, the main purpose is to analyze and compare the effects of two contact models in terms of numerical simulations of train – track vibrations. The reference contact model taken into account is linearized, perfectly elastic Hert'z spring. The second spring, proposed by the authors is enriched with viscous element based on hysteresis damping. Application of both models, and its effects were examined in plane, train – track vibrations simulations with threshold inequality excitation in the middle of the track length. Concluding from the analyses performed, it was found that viscoelastic contact model application is important, when track stresses and fatigue are being investigated. In addition, it was found that neglecting the damping element in contact model reduces the probability of the wheel – rail contact loss phenomenon, and thus leads to incorrect identification of its occurrence.

**Keywords:** Wheel/rail contact; Hertz contact, Linearized contact spring; Train/track dynamics

### Wstęp

W modelowaniu numerycznym układów sprzężonych, gdzie mamy do czynienia z wzajemnym oddziaływaniem ciał, kluczowym elementem jest model styku tych ciał poprzez który zachodzi interakcja. Dobór odpowiedniego modelu numerycznego strefy kontaktu pozwala na prawidłowy opis zjawisk zachodzących pomiędzy ciałami.

W sprzężonym układzie pociąg – tor, kontakt pomiędzy podukładami występuje na styku każdego koła z szyną i ma charakter toczny. Sposób modelowania tego kontaktu zależy istotnie od założonego celu symulacji numerycznych, a ten zależy od rodzaju analizowanych zagadnień. Można je podzielić ogólnie na dwie grupy – zagadnienia ukierunkowane na analizę problemów mechaniki pojazdu kolejowego, oraz zagadnienia ukierun-

kowane na analizę toru kolejowego. W przypadku pierwszej grupy zagadnień stosowane są współcześnie przestrzenne modele kontaktowe, często bardzo złożone, budowane z wykorzystaniem MES (Bosso i in. [1]). Tego typu modele strefy kontaktowej nie są obecnie stosowane w przypadku drugiej grupy zagadnień, szczególnie wtedy, gdy symulacje są przeprowadzane na potrzeby analiz dynamicznych. Powodem wykluczenia

tych modeli jest czas symulacji, który przekraczałby dostępne współcześnie możliwości obliczeniowe.

W symulacjach drgań toru spowodowanych przejazdami pociągów stosowane są zwykle uproszczone modele kontaktu. Najprostszym z nich jest kontakt sztywny, w którym zakłada się, że przemieszczenia koła i szyny są jednakowe, co jest dużym uproszczeniem, ponieważ pomija się wtedy całkowicie odkształcalność stykających się powierzchni. Sztywny model kontaktu jest do tej pory stosowany w symulacjach drgań układów most – tor – pociąg (np. Xu i Zhai [2]). Jednak najpopularniejszym obecnie modelem kontaktu, stosowanym między innymi przez Zhai [3, 4, 5], Klasztornego i Podwórną [6], Yongle Li [7] i opisanym np. w monografii Esvelde [8], jest tzw. więź Hertz'a, czyli model w postaci więzi sprężystej o charakterystyce wyznaczanej na podstawie teorii kontaktowej Hertz'a. W bogatszych wariantach modelu kontaktowego Hertz'a uwzględnia się dodatkowo dyssypację energii na styku koła z szyną. Przykładem jest np. model zaproponowany przez Pombo i in. [9], w którym rozpraszanie energii jest opisane poprzez wprowadzenie tłumika reprezentującego tłumienie histerezy wg modelu Lankarani i Nikravesh'a [10]. Wymienione podstawowe warianty modeli kontaktowych są stosowane alternatywnie w metodach symulacji drgań toru, jednak w literaturze brakuje porównań tych modeli wskazujących na skutki zastosowania konkretnego rozwiązania.

Zasadniczym celem tej pracy jest analiza porównawcza dwóch wybranych więzi kontaktowych, przy czym analizę tę poprzedzono własnym sformułowaniem więzi kontaktowej sprężysto-tłumiącej, w której element sprężysty jest zlinearyzowaną więzią sprężystą Hertz'a a element tłumiący odpowiada tłumieniu histerezy. W symulacjach numerycznych rozważono zatem zlinearyzowaną więź sprężystą typu Hertz'a w dwóch wariantach – bez tłumienia i z tłumieniem histerezy. Skutki zastosowania tych więzi zbadano na podstawie porównania

wyników symulacji pionowych drgań toru z nierównością progową, przez którą przejeżdża pociąg stanowiący zespół pojazdów kolejowych. Każdy pojazd jest modelowany dyskretnym układem dynamicznym o dziesięciu stopniach swobody, złożonym z mas reprezentujących nadwozie, dwa dwuosioowe wózki jezdne i zestawy kołowe. Masy są połączone układami więzi lepko-sprężystych, które modelują dwustopniowe zawieszenie pojazdu. Na podstawie wykonanych analiz numerycznych postawiono tezę, że zastosowanie modelu kontaktowego koło – szyna wzbogaconego o tłumienie histerezy jest sensowne wtedy, gdy badania są ukierunkowane na stan wyłączenia toru i efekty zmęczenia w torze i pojeździe kolejowym. Stwierdzono ponadto, że pominięcie tłumienia w strefie kontaktu nieco zaniża prawdopodobieństwo wystąpienia utraty kontaktu, a więc nie prowadzi do prawidłowej identyfikacji tego zjawiska.

### Więzi kontaktowe

Więź sprężysta Hertz'a, stanowiąca klasyczny model kontaktu pomiędzy kołem i szyną została opisana pokrótce np. w monografii Esvelde [8]. Zarówno szynę jak i koło traktuje się w tym modelu jako ciała nieodkształcalne a pomiędzy te ciała wprowadza się więź sprężystą, która opisuje w uproszczony sposób odkształcenie się ciał w miejscu styku (zgniot). Sztywność więzi  $k_H$  wyznacza się korzystając z teorii Hertz'a.

Według teorii Hertz'a opisującej kontakt dwóch odkształcalnych ciał dwukrzywiznowych, zgniot ciał  $\delta$  w punkcie ich kontaktu, spowodowany siłą kontaktową  $F_H$  działającą pomiędzy tymi ciałami, jest zapisany wzorem (por. Johnson [11])

$$\delta = \left( \frac{9F_H^2}{16E^*R_e} \right)^{1/3} F_2(e) \quad (1)$$

gdzie  $E^*$  i  $R_e$  są stałymi zależnymi odpowiednio od parametrów materiałowych i krzywizny ciał. Stałe te są zdefiniowane wzorami

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2},$$

$$R_e = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{1}{R_{1,y}R_{1,x}} + \frac{1}{R_{2,y}R_{2,x}} \right)}} \quad (2)$$

$F_2(e)$  jest współczynnikiem korekcyjnym zależnym od krzywizny stykających się ciał, który w zagadnieniach inżynierskich z krzywiznami kołowymi można przyjmować równy jedności ([11]). Przekształcając (1) z uwzględnieniem, że  $F_2(e) = 1$ , oraz zakładając, że stykające się ciała są wykonane ze stali o zbliżonych parametrach materiałowych otrzymuje się nieliniową zależność pomiędzy siłą kontaktową a zgniotem materiału w punkcie kontaktu

$$F_H = C_H \delta^3 \quad (3)$$

gdzie

$$C_H = \frac{4G\sqrt{R_e}}{3(1-\nu)} = \frac{2E\sqrt{R_e}}{3(1-\nu^2)} \quad (4)$$

Stała  $C_H$ , nazywana stałą Hertz'a, jest wyrażona poprzez parametr  $R_e$  oraz stałe materiałowe: moduł sprężystości podłużnej  $E$  lub poprzecznej  $G$  i współczynnik Poissona  $\nu$ .

Nieliniowa zależność (3) jest cytowana w różnych współczesnych publikacjach dotyczących zagadnień kontaktu koło – szyna, np. w pracach [12, 13], gdzie stanowi podstawę wyprowadzenia wzoru na tzw. zastępczą sztywność Hertz'a określającą zlinearyzowaną zależność między dynamiczną siłą kontaktową i zgniotem materiału

$$F_H = k_H \delta \quad (5)$$

Sztywność zastępcza  $k_H$  jest charakterystyką liniowo-sprężystej więzi kontaktowej Hertz'a, która jest powszechnie stosowana w zagadnieniach symulacji drgań układów pociąg – tor. W ujęciu ścisłym, sztywność Hertz'a jest pochodną siły kontaktowej (3), która wynosi

$$\frac{dF_H}{d\delta} = \frac{3}{2} C_H \delta^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

Po uwzględnieniu, że

$$\delta^{\frac{1}{2}} = C_H^{-\frac{1}{3}} F_H^{\frac{1}{3}} \quad (7)$$

co wynika bezpośrednio z zależności (3), otrzymuje się

$$\frac{dF_H}{d\delta} = \frac{3}{2} C_H^{\frac{2}{3}} F_H^{\frac{1}{3}} \quad (8)$$

Podstawą linearyzacji zależności (3) do postaci (5) jest przyjęcie uproszczenia, że pochodna (8) jest stała, tj. nie zależy od zmian w czasie siły kontaktowej  $F_H$ , a jej wartość może być obliczona na podstawie statycznej siły nacisku koła na szynę  $Q_H$ , wokół której oscyluje dynamiczna siła kontaktowa  $F_H$ . Wynikiem tego uproszczenia jest wzór na sztywność zastępczą Hertz'a

$$k_H = \frac{3}{2} C_H^{\frac{2}{3}} Q_H^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{4Q_H E^2 \sqrt{R_{\text{rail}} R_{\text{wheel}}}}{9(1-\nu^2)^2}} = \sqrt[3]{\frac{3Q_H E^2 \sqrt{R_{\text{rail}} R_{\text{wheel}}}}{2(1-\nu^2)^2}} \quad (9)$$

podany m. in. przez Esvela [8]. Stałą Hertz'a  $C_H$  we wzorze (9) obliczono na podstawie (4) przyjmując, że promień krzywizny szyny w kierunku podłużnym jest nieskończenie duży oraz że zużycie koła prowadzi do wypłaszczenia jego profilu poprzecznego, co prowadzi do styku dwóch powierzchni walcowych o promieniach krzywizn  $R_{\text{szyny}}$  i  $R_{\text{kola}}$ , zatem  $R_e = \sqrt{R_{\text{szyny}} R_{\text{kola}}}$ .

Aby ustalić zakres stosowalności relacji przybliżonej (5), na rysunku 1 pokazano przykładowe wykresy zależności siły kontaktowej  $F_H$  od zgniotu materiału  $\delta$ , wyznaczone według zależności nieliniowej (3) – linia ciągła i zależności zlinearyzowanej (5) – linie przerywane, przy czym w tym przypadku obliczono sztywność zastępczą Hertz'a (9) przyjmując dwie wartości nacisku statycznego:  $Q_H = 138,5$  kN jak dla pociągu pasażerskiego Shin-kansen (linia ciemnoszara) i  $Q_H = 250$  kN jak dla pociągu towarowego (linia jasnoszara). Można zaobserwować, że za umowną granicę  $\delta = 0,3$  mm wartość siły kontaktowej  $F_H$  wyznaczonej z nieliniowej zależności (3) znacząco odbiega od rozwiązań zastępczych (5),

zatem rozwiązania zlinearyzowane są obciążone zbyt dużym błędem. Można przyjąć, że są akceptowalne poniżej granicy  $\delta = 0,3$  mm, której odpowiada siła kontaktowa o wartości ok. 400 kN lub większa. Należy zauważyć, że zakres od 0 do 400 kN w zupełności pokrywa wartości sił występujących na styku koło-szyna w zagadnieniach kolejowych.

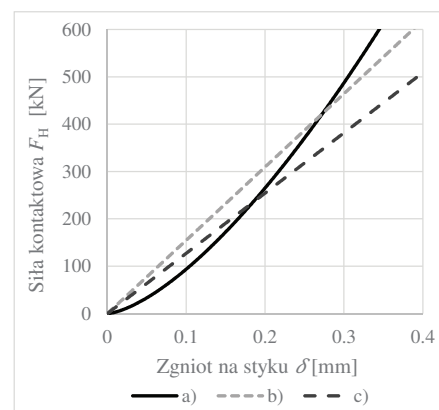
Modele kontaktu idealnie sprężystego wprowadzają pewien dodatkowy rodzaj uproszczenia. Zakładają, że proces odkształcania się ciała jest w pełni odwracalny, podczas gdy w rzeczywistości dochodzi do utraty energii, między innymi wskutek mikrotarć pomiędzy cząsteczkami w strukturze krystalicznej materiału, powstawania ciepła i hałasu. Do opisu historii wielokrotnego obciążania i odciążania materiału wykorzystuje się zjawisko histerezy. Należy tu zauważyć, że czysto-sprężyste modele więzi kontaktowej stanowią tylko niewielką grupę wśród modeli stosowanych np. w zagadnieniach MBS (eng. *Multi-Body Systems*). Skrinjar i in. [14] stwierdzili, że można wyróżnić ponad 20 modeli więzi kontaktowej, z czego większość stanowią więzi sprężysto-tłumiące, w których tłumienie jest opisane za pomocą współczynnika tłumienia histerezy  $\chi$ . Mimo to, model kontaktu uwzględniający tłumienie jest rzadko stosowany w symulacjach drgań układu pociąg – tor. Jeden z nielicznych przykładów opisano w pracy Shabana i in. [15], gdzie autorzy zaproponowali wprowadzenie na styku koło – szyna więzi sprężysto-tłumiącej bazującej na modelu Lee i Wang'a [16], w którym siła kontaktowa jest przedstawiona wzorem

$$F_H = C_H \delta^{\frac{3}{2}} + D_H \dot{\delta} \quad (11)$$

gdzie

$$D_H = \chi \delta^{\frac{3}{2}} = \frac{3(1-e)}{4} \frac{C_H}{\delta_0} \delta^{\frac{3}{2}} \quad (12)$$

przy czym  $\delta_0$  jest początkową prędkością wgniatania koła w szynę natomiast  $e$  jest współczynnikiem restytucji, który dla małych prędkości poniżej 1 m/s nie podlega istotnej zmienności



1. Zależność siła kontaktowa - zgniot:

- a) nieliniowa – wzór (3),  
b) zlinearyzowana – wzór (5), pojazd towarowy,  
c) zlinearyzowana – wzór (5), pojazd pasażerski

– dla stali można przyjąć stałą wartość  $e = 0,93$ .

Podobną sprężysto-tłumiącą więź kontaktową zastosowali Pombo i in. [9]. Do opisu więzi wykorzystali model zaproponowany przez Lankarani i Nikravesh'a [10], który różni się od modelu Lee i Wang'a nieco innym sformułowaniem współczynnika tłumienia histerezy – współczynnik restytucji jest w nim podniesiony do kwadratu, zatem

$$D_H = \chi \delta^{\frac{3}{2}} = \frac{3(1-e^2)}{4} \frac{C_H}{\delta_0} \delta^{\frac{3}{2}} \quad (13)$$

a siła kontaktowa jest nadal wyrażona wzorem (11). Oznacza to, że zarówno w modelu Lee i Wang'a [13] jak i modelu Lankarani i Nikravesh'a [10] więź tłumiąca jest skojarzona z więzią sprężystą o charakterystyce nieliniowej (3).

W niniejszej pracy zaproponowano uproszczoną więź kontaktową sprężysto-tłumiącą, w której element sprężysty odpowiada zlinearyzowanej więzi sprężystej Hertz'a (5). Przyjęto, że siłę kontaktową można w tym przypadku zapisać następującą relacją

$$F_H = k_H \delta + \chi \delta \dot{\delta} = k_H \delta + \frac{3(1-e^2)}{4} \frac{k_H}{\delta_0} \delta \dot{\delta} \quad (14)$$

przez analogię do (11) i (13). Drugi składnik relacji (14) wprowadza efekt nieliniowy ze względu na obecność czynnika  $\delta \dot{\delta}$ . W celu uproszczenia zagadnienia zastosowano konsekwentnie założenie użyte wcześniej do linearyzacji zależności (3) i zlineary-

zowano podobnie składnik formuły (14) związany z elementem tłumiącym więzi kontaktowej, odnosząc go do maksymalnej wartości statycznej  $\delta_0$  jako wartości początkowej wokół której oscyluje dynamiczna deformacja więzi  $\delta$ . To uproszczenie prowadzi do relacji liniowej

$$F_H = k_H \delta + d_H \dot{\delta} \quad \text{gdzie}$$

$$d_H = \frac{3(1-e^2)}{4} \frac{k_H}{\dot{\delta}_0} \delta_0 \quad (15)$$

która opisuje uproszczoną, sprężysto-tłumiącą więź kontaktową zaproponowaną w tej pracy.

Aby zastosować relację (15) w symulacjach sprzężonych drgań pojazdu i toru, konieczne jest określenie prędkości początkowej  $\dot{\delta}_0$  wgniatania koła w szynę. Problem ten nie jest jednoznacznie rozwiązany w literaturze (Pombo i in. [9]), trudność stanowi bowiem fakt, że w każdej chwili  $t_i$  numerycznej symulacji procesu drgań zmienia się lokalizacja styku wskutek toczenia się koła po szynie. Założono w przybliżeniu, że w każdej chwili  $t_i$  powstaje nowy jednopunktowy styk między kołem i szyną oraz nowy zgniot materiału, który narasta w lokalnym czasie  $\tau$  od zera do maksymalnej wartości statycznej  $\delta_0$ , na którą nakłada się zgniot dynamiczny  $\delta(t)$  z prędkością  $\dot{\delta}(t)$ . Przyjęto, że prędkość początkowa  $\dot{\delta}_0$  wgniatania koła w szynę jest prędkością w chwili  $\tau$  osiągnięcia maksymalnego zgniotu statycznego  $\delta_0$ . Do wyznaczenia tej prędkości wykorzystano rozwiązanie podane w [10]

$$\dot{\delta}_0^2 = \frac{2(m_i + m_j)C_H}{m_i m_j (n+1)} \delta_0^{n+1} \quad (16)$$

wyprowadzone na podstawie równania opisującego zderzenie dwóch ciał sferycznych o masach  $m_i$  i  $m_j$  które sformułowano wychodząc z bilansu energetycznego. Energię sprężystą odkształcenia obliczono jako pracę siły kontaktowej wynikającej z teorii Hertz'a, która w przypadku ciał wykonanych ze stali jest określona wzorem (3), a wówczas  $n = 3/2$ . Wprowadzając za-

miast (3) zależność zlinearyzowaną (5) należy podstawić do (16) sztywność zastępczą  $k_H$  zamiast stałej Hertz'a  $C_H$  oraz  $n = 1$ . Uwzględniając dodatkowo, że masa szyny wraz z podłożem jest dużo większa od masy koła ( $m_i \gg m_j$ ) otrzymuje się w przybliżeniu

$$\dot{\delta}_0^2 = \frac{2(m_i + m_j)k_H}{m_i m_j (1+1)} \delta_0^{1+1} \approx \frac{k_H \delta_0^2}{m_{\text{wheel}}} \quad (17)$$

Uwzględniając na podstawie (15), że w chwili  $\tau$  osiągnięcia maksymalnego zgniotu statycznego zachodzi relacja

$$Q_H = k_H \delta_0 + d_H \dot{\delta}_0 \quad (18)$$

oraz

$$\frac{d_H}{k_H} = \frac{3(1-e^2)}{4} \frac{\delta_0}{\dot{\delta}_0} \quad (19)$$

otrzymuje się

$$\dot{\delta}_0 = \frac{Q_H}{k_H} - \frac{d_H}{k_H} \dot{\delta}_0 = \frac{Q_H}{k_H} - \frac{3(1-e^2)}{4} \delta_0 \quad (20)$$

a stąd

$$\dot{\delta}_0 = \frac{4}{7-3e^2} \frac{Q_H}{k_H} \quad (21)$$

Przyjmując dla stali współczynnik restytucji równy  $e = 0,93$ , można założyć w przybliżeniu, że zgniot początkowy (maksymalny statyczny) wynosi  $\delta_0 = 0,908 Q_H / k_H$ .

## Algorytm symulacji drgań

### Założenia wstępne

Do symulacji pionowych drgań toru zastosowano algorytm obliczeniowy opisany w pracy [17], bazujący na metodzie elementów skończonych sformułowanej w ujęciu Galerkina i odnoszący się do płaskiego modelu obliczeniowego układu pociąg – tor

(rysunek 2). Wprowadzono stosowne modyfikacje algorytmu, umożliwiające alternatywne uwzględnienie więzi kontaktowych typu Hertz'a – z tłumieniem i bez tłumienia.

Ze względu na wymogi metody przyjęto, że odkształcalny odcinek toru ma skończoną długość a poza tym odcinkiem tor jest nieodkształcalny. Odkształcalny odcinek toru  $L$  podzielono na dwa odcinki  $L_1$  i  $L_2$  różniące się istotnie parametrami podłoża, wskutek czego na styku tych odcinków pojawia się nierówność progowa.

Tor jest w tym modelu belką Eulera – Bernoulliego spoczywającą na podłożu sprężystym Winklera z tłumieniem, a pojazdy kolejowe są układami dynamicznymi o dziesięciu stopniach swobody. Tor jest obciążony zmiennymi w czasie naciskami zestawów kołowych  $R_j(t)$ , które są równocześnie reakcjami więzi kontaktowych. Położenie zestawu kołowego o numerze  $j$  w chwili  $t$  opisuje współrzędna  $s_j(t) = vt - d_j$ , gdzie  $v$  jest stałą prędkością jazdy pociągu.

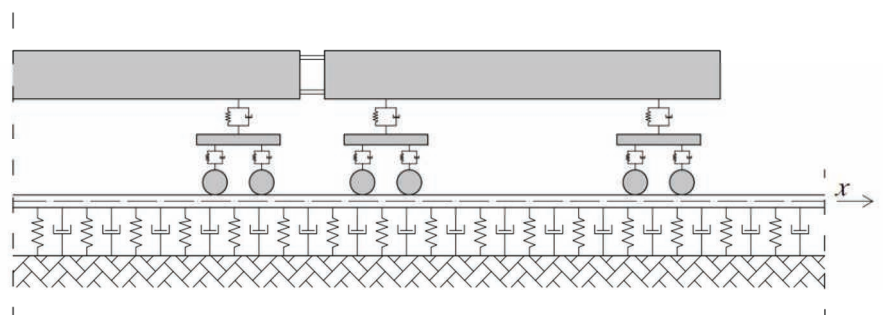
Interakcję pomiędzy dwoma sprzężonymi podukładami dynamicznymi: torem i pociągiem zapewniają więzi kontaktowe przyjęte alternatywnie jako:

- dwustronne, zlinearyzowane więzi typu Hertz'a, idealnie sprężyste (jak w pracy [17]), wówczas

$$R_j(t) = Q_j + k_{Hj}[V_j(t) - W_j(t)] \quad (22)$$

- dwustronne, zlinearyzowane więzi typu Hertz'a, sprężysto-tłumiące, gdzie

$$R_j(t) = Q_j + k_{Hj}[V_j(t) - W_j(t)] +$$



2. Schemat układu pociąg – tor

$$+ d_{Hj}[\dot{V}_j(t) - \dot{W}_j(t)] \quad (23)$$

przy czym  $Q_j$  jest tu statycznym naciśnięciem  $j$ -tego zestawu kołowego,  $V_j(t)$  jest pionowym przemieszczeniem tego zestawu a  $W_j(t)$  przemieszczeniem toru w punkcie kontaktu. Sztywność i parametr tłumienia więzi kontaktowej wynikają z równoległego połączenia dwóch więzi wprowadzonych na styku każdego koła zestawu z szyną, stąd  $k_{Hj}=2k_H$ ,  $d_{Hj}=2d_H$ , przy czym we wzorach (9) i (15) należy podstawić:  $Q_H=Q/2$ .

## Ogólna postać równań ruchu układu pociąg – tor

Pionowe drgania toru  $w(x, t)$  są opisane równaniem różniczkowym o znanej postaci

$$EJ \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + kw(x, t) + c \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^N R_j(t) \delta(x - s_j) \quad (24)$$

Równanie to przekształcono na układ równań różniczkowych zwyczajnych stosując metodę elementów skończonych (w ujęciu Galerkin), która pozwala łatwo uwzględnić różne wartości parametrów podłoża toru ( $k$  i  $c$ ) na odcinkach  $L_1$  i  $L_2$ . Układ równań zapisany w notacji macierzowej ma następującą postać ogólną

$$\mathbf{B}_{tt} \ddot{\mathbf{q}}_t(t) + \mathbf{C}_{tt} \dot{\mathbf{q}}_t(t) + \mathbf{K}_{tt} \mathbf{q}_t(t) = \tilde{\mathbf{F}}_t(t) \quad (25)$$

Układ równań, które opisują drgania zespołu pojazdów tworzących pociąg

$$\mathbf{B}_{vv} \ddot{\mathbf{q}}_v(t) + \mathbf{C}_{vv} \dot{\mathbf{q}}_v(t) + \mathbf{K}_{vv} \mathbf{q}_v(t) = \tilde{\mathbf{F}}_v(t) \quad (26)$$

wyprowadzono metodologią typową dla układów dyskretnych, tj. na podstawie bilansu energetycznego i równań Lagrange'a. Aby ułatwić zapis matematyczny sprzężenia równań (25) i (26), równania tworzące układ (25) tak uszeregowano, że wektor przemieszczeń odpowiadających stopniom swobody pojazdów dzieli

się na dwa bloki:  $\mathbf{q}_v = \text{col}(\mathbf{r}, \mathbf{V}_c)$ . Symbol „col” oznacza w tym zapisie macierz kolumnową, wektor  $\mathbf{r}$  odpowiada wewnętrznym stopniom swobody pojazdów a wektor  $\mathbf{V}_c = [V_1, V_2, \dots, V_N]^T$  zawiera pionowe przemieszczenia kolejnych zestawów kołowych. Adekwatnie do podziału blokowego wektora  $\mathbf{q}_v$  dzielą się na bloki wszystkie macierze występujące w równaniu (26) oraz wektor obciążeń  $\tilde{\mathbf{F}}_v(t)$ .

Przemieszczenia względne więzi kontaktowych wynoszą  $V_j(t) - W_j(t)$ , co można zapisać łącznie wzorem  $\mathbf{V}_c - \mathbf{W}_c$ , gdzie  $\mathbf{W}_c = [W_1, W_2, \dots, W_N]^T$ , przy czym łątwo jest zauważyć, że  $W_j(t) = w(s_j, t)$ . W przypadku idealnie sprężystych więzi Hertz'a (por. (22)), wektory prawych stron równań (25) i (26) mają po wykonaniu obliczeń następującą postać ogólną

$$\tilde{\mathbf{F}}_t = \tilde{\mathbf{F}}_Q + \tilde{\mathbf{K}}_{tc} \mathbf{V}_c - \tilde{\mathbf{K}}_{tt} \mathbf{q}_t \quad (27)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_v = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \tilde{\mathbf{K}}_{ct} \mathbf{q}_t - \{k_H\} \mathbf{V}_c \end{bmatrix} \quad (28)$$

która ujawnia sprzężenie drgań pociągu i toru.

Po podstawieniu (27) i (28) odpowiednio do równań (25) i (26), i po uwzględnieniu zmiany kolejności tych równań oraz wewnętrznej struktury wektora  $\mathbf{q}_v$ , otrzymuje się ostatecznie równanie macierzowe o strukturze blokowej, które opisuje drgania układu pociąg – tor

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{tt} & \mathbf{B}_{tc} & \emptyset \\ \mathbf{B}_{ct} & \mathbf{B}_{cc} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \mathbf{B}_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}} \\ \ddot{\mathbf{V}}_c \\ \ddot{\mathbf{q}}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{tt} & \mathbf{C}_{tc} & \emptyset \\ \mathbf{C}_{ct} & \mathbf{C}_{cc} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \mathbf{C}_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{V}}_c \\ \dot{\mathbf{q}}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{tc} & \emptyset \\ \mathbf{K}_{ct} & \mathbf{K}_{cc} + \{k_H\} & -\tilde{\mathbf{K}}_{ct} \\ \emptyset & -\tilde{\mathbf{K}}_{tc} & \mathbf{K}_{tt} + \tilde{\mathbf{K}}_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{V}_c \\ \mathbf{q}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \\ \tilde{\mathbf{F}}_Q \end{bmatrix} \quad (29)$$

W przypadku, gdy modelem kontaktu jest zlinearyzowana więź typu Hertz'a z tłumieniem histerezy, opisana wzorami (15) i (23), do wyznaczenia wektorów obciążeń uogólnionych  $\tilde{\mathbf{F}}_t$  i  $\tilde{\mathbf{F}}_v$  konieczne jest obliczenie prędkości przemieszczenia toru, które śledzi położenie  $j$ -tego zestawu kołowego,

zmieniające się w czasie. Zgodnie z ideą metody elementów skończonych, przemieszczenie śledzące jest zapisane wzorem

$$W_j(t) = w(s_j, t) = \sum_{e=1}^n \mathbf{N}_e^T(\xi_j) \mathbf{W}_e(t) \quad (30)$$

gdzie  $\mathbf{W}_e$  jest wektorem przemieszczeń brzegowych elementu skończonego  $e$  o długości  $l$ ,  $\mathbf{N}_e$  jest wektorem funkcji kształtu,  $\xi_j = (s_j - l(e-1))/l$ . Funkcje kształtu  $\mathbf{N}_e$  są niezerowe tylko w obrębie elementu  $e$ , ponadto  $\xi_j = \xi_j(t)$  ponieważ  $s_j = vt - d_j$ . Wynika stąd, że

$$\dot{W}_j(t) = \dot{w}(s_j, t) = \sum_{e=1}^n \frac{v}{l} \mathbf{N}_e^T(\xi_j) \mathbf{W}_e(t) + \sum_{e=1}^n \mathbf{N}_e^T(\xi_j) \dot{\mathbf{W}}_e(t) \quad (31)$$

gdzie  $(\cdot)' = d/d\xi$ . Po wykonaniu szczególnych obliczeń otrzymuje się

$$\tilde{\mathbf{F}}_t = \tilde{\mathbf{F}}_Q + \tilde{\mathbf{K}}_{tc} \mathbf{V}_c - (\tilde{\mathbf{K}}_{tt} + \tilde{\mathbf{K}}_{tt}^{\text{ch}}) \mathbf{q}_t + \tilde{\mathbf{C}}_{tc} \dot{\mathbf{V}}_c - \tilde{\mathbf{C}}_{tt} \dot{\mathbf{q}}_t \quad (32)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_v = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \tilde{\mathbf{K}}_{ct} \mathbf{q}_t - \{k_H\} \mathbf{V}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \emptyset \\ -\{d_H\} \dot{\mathbf{V}}_c + \tilde{\mathbf{K}}_{ct}^{\text{ch}} \mathbf{q}_t + \tilde{\mathbf{C}}_{ct} \dot{\mathbf{q}}_t \end{bmatrix} \quad (33)$$

co prowadzi do układu równań ruchu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{tt} & \mathbf{B}_{tc} & \emptyset \\ \mathbf{B}_{ct} & \mathbf{B}_{cc} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \mathbf{B}_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}} \\ \ddot{\mathbf{V}}_c \\ \ddot{\mathbf{q}}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{tt} & \mathbf{C}_{tc} & \emptyset \\ \mathbf{C}_{ct} & \mathbf{C}_{cc} + \{D_H\} & -\tilde{\mathbf{C}}_{ct} \\ \emptyset & -\tilde{\mathbf{C}}_{tc} & \mathbf{C}_{tt} + \tilde{\mathbf{C}}_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{V}}_c \\ \dot{\mathbf{q}}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{tc} & \emptyset \\ \mathbf{K}_{ct} & \mathbf{K}_{cc} + \{k_H\} & -\tilde{\mathbf{K}}_{ct} - \tilde{\mathbf{K}}_{ct}^{\text{ch}} \\ \emptyset & -\tilde{\mathbf{K}}_{tc} & \mathbf{K}_{tt} + \tilde{\mathbf{K}}_{tt} + \tilde{\mathbf{K}}_{tt}^{\text{ch}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{V}_c \\ \mathbf{q}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \\ \tilde{\mathbf{F}}_Q \end{bmatrix} \quad (34)$$

W obu rozważanych przypadkach więzi kontaktowych, rozwiązanie równań ruchu otrzymuje się za pomocą klasycznego rekurencyjnego schematu całkowania numerycznego, np. jedną z metod  $\beta$ -Nemarka.

## Symulacje drgań układu pociąg-tor

Na podstawie otrzymanych równań ruchu (29) i (34) opracowano autorski program symulacji drgań w środowisku

Tab. 1. Parametry wejściowe

| Parametr                                                      | Wartość                           |
|---------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| Prędkość przejazdu                                            | 60 m/s                            |
| Czas retardacji (dot. materiału szyny)                        | $2,1 \cdot 10^{-5}$ s             |
| Szyna                                                         | 60E1                              |
| Współczynnik sprężystości podłoża 1                           | $1,3 \cdot 10^8$ N/m <sup>2</sup> |
| Współczynnik sprężystości podłoża 2                           | $7,5 \cdot 10^8$ N/m <sup>2</sup> |
| Tłumienie podłoża                                             | $2,8667 \cdot 10^5$ Ns/m          |
| Masa nadwozia                                                 | 36000 kg                          |
| Masa wózka                                                    | 4950 kg                           |
| Masa zestawu kołowego                                         | 2400 kg                           |
| Moment bezwładności obrotowej masy nadwozia                   | 1894000 kgm <sup>2</sup>          |
| Moment bezwładności obrotowej masy wózka jeźdnego             | 6150 kgm <sup>2</sup>             |
| Połowa odległości pomiędzy osiami wózków                      | 8,75 m                            |
| Połowa odległości pomiędzy zestawami kołowymi w wózku jeźdnym | 1,25 m                            |
| Tłumienie dolnego zawieszenia pojazdu                         | $2 \cdot 9815$ Ns/m               |
| Tłumienie górnego zawieszenia pojazdu                         | $2 \cdot 21675$ Ns/m              |
| Sztywność dolnego zawieszenia pojazdu                         | $2 \cdot 1270000$ N/m             |
| Sztywność górnego zawieszenia pojazdu                         | $2 \cdot 443500$ N/m              |
| Promień koła pojazdu                                          | 0,46 m                            |
| Promień szyny w punkcie kontaktu                              | 0,3 m                             |

sku obliczeniowym Python 3. Całkowanie równań po czasie wykonano metodą Newmarka – Wilsona z parametrem  $\beta=1/4$ , krok czasowy przyjęto  $\Delta t=0,0001$  s. Do dyskretyzacji toru zastosowano elementy skończone o długości 0,5 m. Przejazd pociągu złożonego z trzech wagonów odbywa się po 100-tu metrowym odcinku toru, w którego środku przewidziano nierówność progową wynikającą ze skokowej zmiany sztywności powierzchniowej podłoża toru: z  $5 \cdot 10^7$  kN/m<sup>3</sup> do  $25 \cdot 10^7$  kN/m<sup>3</sup>. Współczynniki sprężystości podłoża belki modelującej tor obliczono przyjmując szerokość oparcia równą długości podkładu kolejowego 2,6 m. Pozostałe parametry przyjęte do obliczeń są zestawione w tabeli 1, przy czym dane dotyczące pojazdu zaczerpnięto z monografii Klasztornego [18].

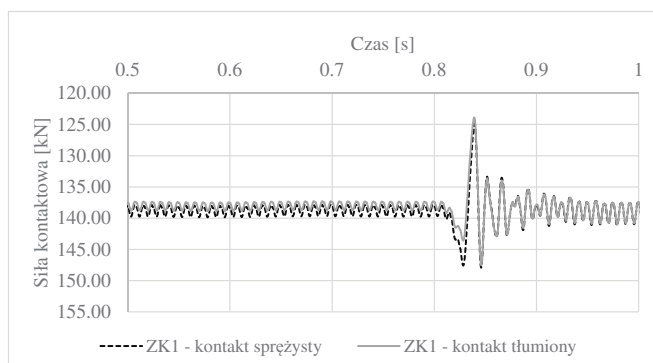
Celem przeprowadzonej analizy numerycznej było porównanie wyni-

ków symulacji drgań układu pociąg – tor, uzyskanych przy zastosowaniu dwóch różnych modeli więzi kontaktowej na styku koła z szyną. Wzbudzeniem drgań pojazdu a stąd i toru kolejowego jest wjazd pojazdu z odcinka toru nieodkształcalnego na odcinek odkształcalny, a następnie przejazd przez nierówność progową toru z prędkością 60 m/s (216 km/h). Pokazane na rysunkach 3-7 wyniki symulacji są fragmentami przebiegów czasowych wybranych odpowiedzi układu pociąg – tor, które ilustrują efekt dynamiczny spowodowany nierównością progową toru.

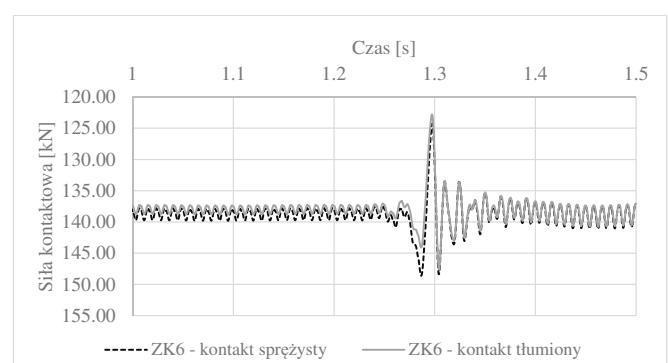
Na rysunku 3 przedstawiono dwa wykresy zmian w czasie siły kontaktowej między pierwszym zestawem kołowym i torem. Analogiczne wyniki odnoszące się do szóstego zestawu kołowego pokazano na rysunku 4. W obu przypadkach siła kontaktowa oscyluje wokół siły nacisku statycz-

nego, która wynosi 138,5 kN. Dynamiczny efekt progowy manifestuje się tu trzema dużymi pikami, następnie oscylacje siły kontaktowej maleją. Za miarę efektu progowego można przyjąć wartość piku siły kontaktowej odniesioną do nacisku statycznego i wyrażoną w procentach. Wówczas, w przypadku sprężystej więzi kontaktowej i pierwszego zestawu kołowego kolejne piki wynoszą: 106%, 90% i 107%, a w przypadku więzi sprężysto-tłumiącej: 104%, 89% i 106,5%. Podobne wyniki otrzymuje się dla szóstego zestawu kołowego. Wynika stąd, że zastosowanie sprężysto-tłumiącej więzi kontaktowej zamiast klasycznej więzi idealnie sprężystej, równoznaczne z uwzględnieniem tłumienia w strefie kontaktu koło – szyna, powoduje zmniejszenie pików przyrostowych (pierwszego i trzeciego) siły kontaktowej, występujących po przejeździe zestawu kołowego przez nierówność progową. Efekt ten jest wyraźnie widoczny w przypadku pierwszego piku siły, natomiast słabo manifestuje się w pikach następnych.

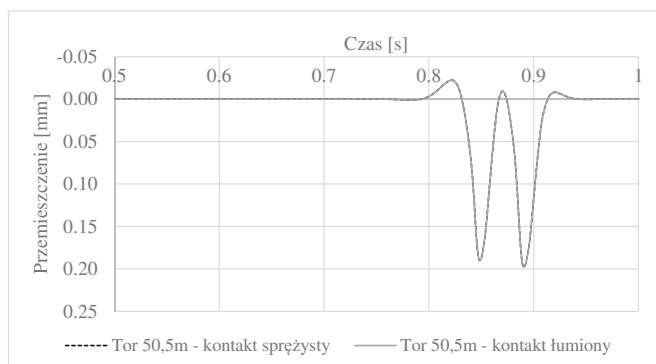
Warto zauważyć, że zarówno pierwszy jak i trzeci pik jest zwiększeniem siły kontaktowej, niekorzystnym z uwagi na stan wyężenia toru (piki przyrostowe). Z tego punktu widzenia, uproszczenie modelu kontaktowego do więzi idealnie sprężystej jest rozwiązaniem konserwatywnym, ponieważ daje zawyżone wyniki. Odwrotnie jest w przypadku drugiego piku, któremu odpowiada zmniejszenie siły kontaktowej, a zatem i siły nacisku na tor. Można sądzić, że ze wzrostem prędkości jazdy wartość piku będzie rosła, co w skrajnej sytuacji może doprowadzić do utraty kontaktu koło –



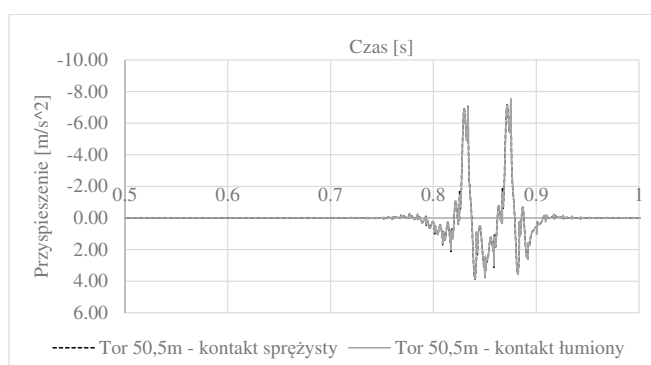
3. Siła w więzi kontaktowej zestawu kołowego nr 1



4. Siła w więzi kontaktowej zestawu kołowego nr 6



5. Przesunięcie toru w przekroju położonym bezpośrednio za nierównością progową



6. Przyspieszenie drgań toru w przekroju położonym bezpośrednio za nierównością progową

szyna. W tym aspekcie, zastosowanie uproszczonego modelu kontaktu nie jest korzystne, ponieważ zaniża efekt progowy.

Na kolejnych trzech rysunkach pokazano fragmenty wygenerowanych przebiegów drgań i przyspieszenia drgań toru zaraz za nierównością progową (rysunki 5 i 6) oraz przyspieszenia drgań pierwszego zestawu kołowego (rysunek 7). Jak wynika z przedstawionych wykresów, wpływ tłumienia w strefie kontaktu jest praktycznie niewidoczny przy założonej prędkości jazdy pociągu (60 m/s). Należy podkreślić, że wyniki drgań toru pokazywane z punktu widzenia obserwatora nieruchomego, tj. w konkretnym przekroju toru, nie pozwalają na analizę efektu progowego (rysunki 5 i 6). Należałoby je porównać z symulacjami przejazdu pociągu przez tor pozbawiony nierówności progowej i wykonać obliczenia co najmniej dla kilku następujących po sobie przekrojów. Jest to podejście nieefektywne. Lepszą alternatywą byłaby obserwacja drgań z pozycji obserwatora ruchomego, czyli analiza drgań w przekroju

kontaktowym toru. Taką „śledzącą” odpowiedź jest z natury rzeczy przebieg drgań zestawu kołowego (rysunek 7). Warto zauważyć, że także w tym przypadku zastosowanie więzi sprężysto-tłumiącej nie ma zauważalnego wpływu na wyniki symulacji.

Na rysunku 7 jest wyraźnie widoczny efekt progowy w przyspieszeniach drgań zestawu kołowego. Największy pik przyspieszenia jest skojarzony z największym (drugim) pikiem siły kontaktowej (rysunek 3). Pionowy ruch zestawu kołowego z dodatnim przyspieszeniem skutkuje przeciwnie skierowaną siłą bezwładności, która redukuje statyczną siłę nacisku na tor w rozważanym przypadku do ok. 90%. Podkreślić należy, że ta obserwacja potwierdza prawidłowe funkcjonowanie opracowanego algorytmu i oprogramowania – zgodne z intuicją i doświadczeniem.

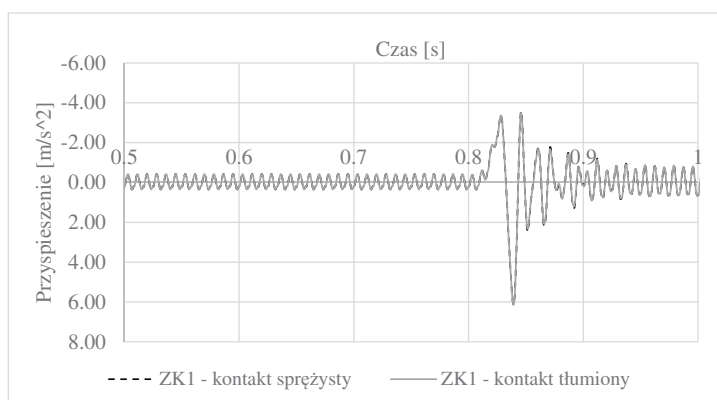
## Wnioski generalne

Na podstawie wykonanych analiz numerycznych można postawić tezę, że zastosowanie modelu kontaktowego

koło – szyna wzbogaconego o tłumienie histerezy jest sensowne wtedy, gdy badania są ukierunkowane na stan wyężenia toru, a idąc dalej – na efekty zmęczeniowe w torze i pojeździe kolejowym. Wynika to z faktu, że tłumienie na kontakcie koło-szyna wpływa istotnie na siłę kontaktową, która jest równocześnie siłą obciążającą tor i pojazd. W analizach stanu wyężenia i analizach zmęczeniowych, jeśli mają odnosić się do kolei dużych prędkości, wskazane jest równocześnie uwzględnienie jednostronnej pracy więzi kontaktowych, aby opisać sytuację utraty kontaktu obserwowane w praktyce eksploatacyjnej. Pokazano, że pominięcie tłumienia w strefie kontaktu zaburza prawidłową identyfikację zjawiska utraty kontaktu. Zaniża prawdopodobieństwo wystąpienia utraty kontaktu, ponieważ niedoszacowane jest wtedy odciążenie toru (maleje pik siły kontaktowej zmniejszający nacisk statyczny). Powyższe wnioski należy traktować jako wstępne. Do ich potwierdzenia potrzebna jest znacznie obszerniejsza analiza numeryczna zawierająca badania wpływu prędkości eksploatacyjnych, w tym analiza stanu wyężenia toru bazująca na zmodyfikowanym algorytmie uwzględniającym jednostronne więzi kontaktowe.

## Materiały źródłowe

- [1] Bosso N., Spiriyagin M., Gugliotta A., Somá A., Mechatronic modeling of real-time wheel-rail contact, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2013.
- [2] Xu L., Zhai W., A three-dimensional



7. Przyspieszenie drgań zestawu kołowego nr 1

- model for train-track-bridge dynamic interactions with hypothesis of wheel-rail rigid contact, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, vol. 132, 471-489.
- [3] Zhai W., *Vehicle – Track coupled dynamics theory and applications*, Springer, Science Press Beijing, 2020
- [4] Zhai W., Sun X., A detailed model for investigating vertical interaction between railway vehicle and track, *International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, 1994, vol. 23, 603-615
- [5] Zhai W., Two simple fast integration methods for large – scale dynamic problems in engineering, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996, vol. 39, 4199-4214
- [6] Podwórna M., Kłasztorny M., Wpływ cech pojazdów szynowych na odpowiedź dynamiczną mostu belkowego, *Drogi i Mosty*, 2011, nr. 3, 63-87.
- [7] Xu X. Y., Li Y. L., Dynamic analysis of wind-vehicle-bridge system based on rigid-flexible coupling method, *Advances in Civil, Environmental, and Materials Research* ACEM16, 28.08.2016.
- [8] Esveld C., *Modern railway track*, MRT-Productions, The Netherlands, 2014.
- [9] Pombo J., Ambrosio J., Silva M., A new wheel – rail contact model for railway dynamics, *Vehicle System Dynamics*, 2007, vol 45, 165-189.
- [10] Lankarani H., Nikravesh P., A contact force model with hysteresis damping for impact analysis of multibody systems, *Journal of Mechanical Design*, 1990, vol 112, 369-376.
- [11] Johnson K. L., *Contact mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [12] Knothe K., Stichel S., *Rail vehicle dynamics*, Springer, Cham, 2017.
- [13] Sun Y.Q., Dhanasekar M., A dynamic model for the vertical interaction of the rail track and wagon system, *International Journal of Solids and Structures*, 2002, vol 39, s. 1337-1359.
- [14] Skrinjar L., Slavic J., Boltezar M., A review of continuous contact – force models in multibody dynamics, *International Journal of Mechanical Science*, 2018, vol 145, 171-187.
- [15] Shabana A., Zaazaa K. Escalona J. Sany J. Development of elastic force model for wheel/rail contact problems, *Journal of Sound and Vibration*, 2004, vol 269, 295-325.
- [16] Lee T., Wang A., On the dynamics of intermittent – motion mechanisms, Part I. Dynamic model and response, *Journal of Mechanisms Transmissions and Automation in Design – Transactions of the ASME*, 1983, vol 105, 534-540.
- [17] Bryja D., Chojnacki W., Dwustronna więź kontaktowa Hertz'a w numerycznej analizie drgań sprzężonego układu pociąg-tor, *Przegląd Komunikacyjny*, 2019, r. 74, nr 11, 2-7.
- [18] Kłasztorny M., *Dynamika mostów belkowych obciążonych pociągami szybkobieżnymi*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2005.

 14. MIĘDZYNARODOWE TARGI KOLEJOWE

# TRAKO

[21–24.09.2021]

GDAŃSK – TRAKOTARGI.PL

warto **TU** być

