

# Przemieszczenia podłużne bezстыkowego toru kolejowego wskutek lokalnej różnicy temperatury na jego długości

## Longitudinal displacements of railway jointless track due to local temperature difference on its length



**Włodzimierz Bednarek**

Dr hab. inż.

Politechnika Poznańska  
Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska  
Zakład Budowy Mostów i Dróg Kolejowych

wlodzimierz.bednarek@put.poznan.pl

**Streszczenie:** W artykule przedstawiono analizę przemieszczeń podłużnych bezстыkowego toru kolejowego wskutek lokalnej różnicy temperatury na jego długości. Powstające w wyniku miejscowych różnic temperatury szyny siły termiczne na długości toru, wywołują lokalne, strefowe przemieszczenia poziome przekrojów poprzecznych szyny. Przemieszczenia osiowe toru wzbudzają z kolei reakcję poziomą podłoża w takim stopniu, na jaki pozwala wartość powstającego przemieszczenia. Dodatkowo powstający podczas eksploatacji zmienny opór podłużny na długości toru (spowodowany m. in. różnym stanem zagęszczenia podsypki, różną siłą docisku stopki szyny do przekładki), okresowo działające siły od pojazdów, zmienna wartość przyczepności kół z szynami, a także różny stopień nagrzania szyny, powodują odcinkowe zaburzenia stanu równowagi pracy bezстыkowego toru kolejowego. W pewnych przypadkach przyjmuje to postać mikroprzemieszczeń szyn, które mogą przybrać formę np. przemieszczeń w postaci np. pełzania, prowadzących do zmian wartości sił podłużnych na długości odcinka, na którym wystąpiło przemieszczenie. W pracy przedstawiono analityczną postać rozważanego zagadnienia oraz zawarto przykłady obliczeniowe, wykresy i tabele obrazujące wpływ analizowanych parametrów na otrzymywane przemieszczenia podłużne bezстыkowego toru kolejowego wskutek lokalnej różnicy temperatury na jego długości.

**Słowa kluczowe:** Tor bezстыkowy; Przemieszczenie podłużne; Lokalna różnica temperatury

**Abstract:** In the paper is shown an analysis of a CWR track's longitudinal displacements due to a local temperature difference on its length. The thermal forces on the railway track length arise due to a local temperature difference of rail, causing the local, zonal the longitudinal displacements of rail cross-sections. Axial displacements of track induce in succession a longitudinal reaction of roadbed in such a degree on which a arising displacements allow. Additionally a arising during track operating a variable longitudinal resistance on track's length (generated among other things by different state of ballast compaction, different pressure force of rail foot to divider), periodical acting force from vehicles, different value of adhesion wheels with rails and also different stage of rail heating, cause a disturbance section of equilibrium state of CWR track. In certain cases it assumes a shape of rails micro displacements, which can take a form e.g. creep displacements leading to value changes of longitudinal forces on this segment length with arising displacements. In paper analytical form of considered problem is given and computational examples, diagrams and tables reflecting influence of analyzed parameters on obtained a CWR track's longitudinal displacements due to local temperature difference on its length is inserted

**Keywords:** CWR track; Longitudinal displacement; Local temperature difference

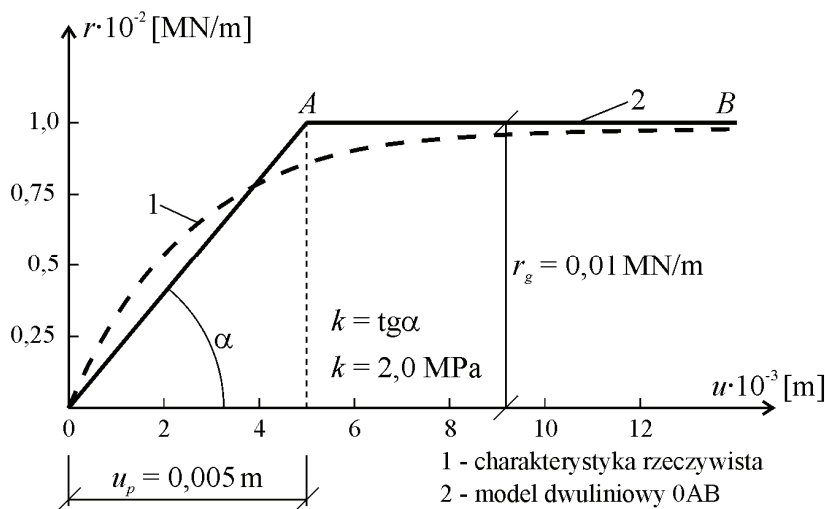
### Wprowadzenie

Zagadnienie przemieszczeń podłużnych toru kolejowego znajduje swoje zastosowanie w analizach różnych problemów podczas jego pracy (np. ocena nawierzchni kolejowej z uwagi na trwałe podłużne przemieszczenia, współdziałanie mostu z torem w warunkach zmian temperatury, stateczności czy podnoszenia toru w płaszczyźnie pionowej [1-5,7,9-11,15,16]). Analizowane w pracy zagadnienie związane jest z lokalnymi odcinkami występowania poziomych prze-

mieszczeń przekrojów poprzecznych szyn, które są następstwem pojawiających się w nich rzeczywistych nierównomiernych rozkładów temperatur po długości toru bezстыkowego [5,8,12,17]. Z rozważanym zjawiskiem spotykamy się również w strefach poziomych przemieszczeń podłużnych toru bezстыkowego, w skrajnych jego odcinkach (w obrębie tzw. *odcinków oddychających*). Przemieszczenia poziome  $u$  toru od zmian temperatury, wywołują z kolei reakcję poziomą podłoża podsypkowego  $r(u)$ , zależną od wartości przesunięcia  $u$  przekroju

poprzecznego toru (rys. 1). W literaturze z zakresu dróg kolejowych spotyka się różne charakterystyki oporu podłużnego podłoża podsypkowego [16]:

Opór rzeczywisty podłoża podsypkowego jest opisywany modelem zastępczym, najczęściej modelem sprężystym, plastycznym lub sprężysto-plastycznym [1,3,4] – rys. 2. Modele zastępcze wykorzystywane są do analizy np. przemieszczeń podłużnych wskutek lokalnej różnicy temperatury czy hamowania pociągów [7,8,12]. Dla modelu oporu plastycz-



1. Typowy opór podłużny podczas eksploatacji (podkład drewniany) [16]

1) badania rzeczywiste; 2) model dwuliniowy

gdzie:  $k$  – teoretyczny współczynnik sztywności poziomej podłoża [MPa];  $u_p$  – wartość przemieszczenia sygnalizująca zmianę modelu oporu podłoża

Tab. 1. Zależność średniego oporu skumulowanego od stanu śrub stopowych

Stan śrub stopowych	Stała termiczna toru, $C_1$ [mm/1°C]	Stała oporu podłużnego skumulowanego, $C_r$ [MN/m <sup>2</sup> ]	Długość odcinka, $l_p$ [m]	$r_{sr}$ [MN/m]
zakręcone prawidłowo	0,3272	1,0614	54,4872	0,00902
zakręcone prawidłowo	0,2885	1,3634	48,0770	0,01023
70 % zluzowanych	0,8077	0,1739	134,6154	0,00365
wszystkie zluzowane	1,3847	0,0592	230,7692	0,00213

nego podłoża podsypkowego (model  $r = r_g$  z rys. 2a), możemy zapisać średni opór skumulowany w postaci [6]:

$$r_{sr} = \frac{N_t}{l_0}, \quad (1)$$

gdzie:  $N_t$  – siła termiczna w torze, [kN];  $N_t = \alpha_t \cdot E_s \cdot A \cdot \Delta t$ , [kN];  $\alpha_t$  – współczynnik rozszerzalności stali szynowej, [1/°C];  $E_s \cdot A$  – sztywność podłużna toru, [MN];  $\Delta t$  – przyrost temperatury szyny, [°C];  $l_0$  – długość zluzowanego odcinka toru podczas regulacji naprężeń, [m],

to przemieszczenie zluzowanego końca szyny ( $\delta$ ) możemy zapisać [6]:

$$\delta = \alpha_t^2 \cdot E_s \cdot A \cdot \frac{\Delta t^2}{2 \cdot r_{sr}} \quad (2)$$

oraz wydłużenie swobodnego końca szyny można zapisać:

$$\delta = \int_{l_0}^0 \lambda \cdot \Delta t \, dl = \lambda \cdot l_0 \cdot \Delta t = C_1 \cdot \Delta t, \quad (3)$$

gdzie:  $\lambda = 0,5 \cdot \alpha_t = 6 \cdot 10^{-6}$  [6], dla  $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5}$  [1/°C]. Wykorzystując te wzory otrzymujemy:

$$\alpha_t^2 \cdot E_s \cdot A \cdot \frac{\Delta t^2}{2 \cdot r_{sr}} = C_1 \cdot \Delta t \Rightarrow \alpha_t \cdot N_t \cdot$$

$$\frac{\Delta t}{2 \cdot r_{sr}} = C_1 \cdot \Delta t \Rightarrow r_{sr} = \frac{\alpha_t}{2 \cdot C_1} \cdot N_t \quad (4)$$

gdzie:  $C_1$  jest wielkością charakterystyczną dla danego stanu nawierzchni toru [6]. Ostatecznie, wprowadzając dodatkowo parametr pomocniczy  $C_r$  (stała oporu podłużnego skumulowanego), opór podłużny może być zapisany w następującej postaci [6]:

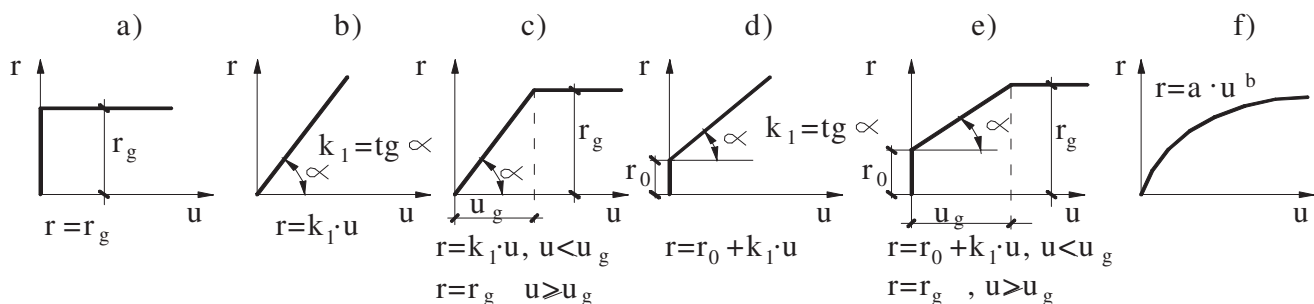
$$C_1 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \left( \frac{\delta_i}{\Delta t} \right), \quad C_r = \frac{\alpha_t^2 \cdot E_s \cdot A}{2 \cdot C_1^2},$$

oraz  $r_{sr} = C_r \cdot \delta.$  (5)

W tabl. 1 zawarto charakterystyki oporu podłużnego dla toru bezszynowego z szyn 60E1 (na podstawie badań doświadczalnych [6]):

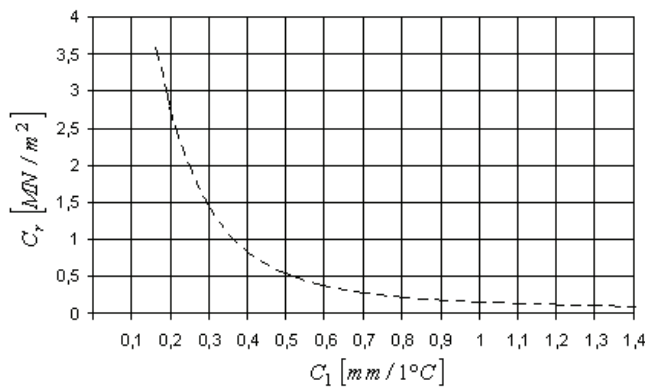
Jak wynika z tabl. 1 dla prawidłowo zakręconych śrub stopowych opór podłoża podsypkowego wynosi  $r_0 = r_{sr} \approx 0,002 \div 0,01$  [MN/m] (wartości przyjęte do przykładów obliczeniowych). Wykorzystując wzory 4 i 5 na rys. 3÷5 przedstawiono następujące zależności: stałej oporu podłużnego skumulowanego od stałej termicznej toru, oporu podłużnego podsypki od przemieszczeń szyny dla różnych temperatur oraz przemieszczeń zluzowanej szyny od temperatury.

Uzyskane w tym punkcie zależności i wartości wykorzystano do przykładów obliczeniowych zawartych na rys. 10 oraz w tabl. 2 i 3.

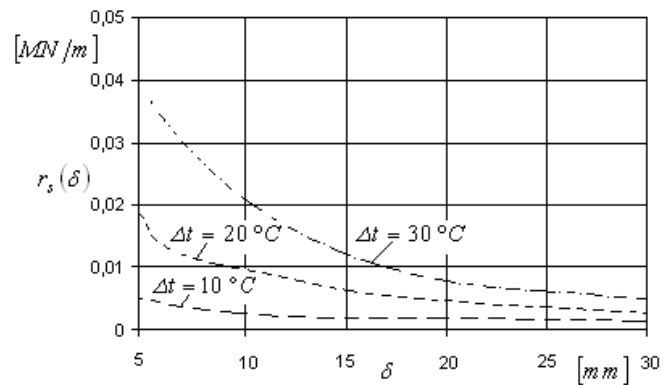


2. Modele oporu podłużnego podsypki

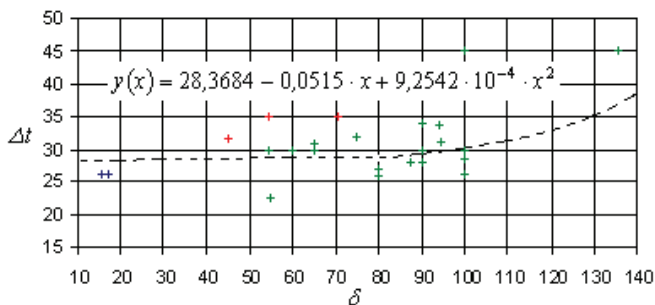
przyjęte oznaczenia (wykorzystywane do obliczeń w pracy):  $r_g$  – graniczny opór podłoża podsypkowego [MN/m];  $k_1$  – współczynnik sztywności poziomej podłoża [MPa];  $u_g$  – wartość graniczna przemieszczenia sygnalizująca zmianę modelu oporu podłoża podsypkowego [m];  $r_0$  – opór początkowy podłoża podsypkowego [MPa]



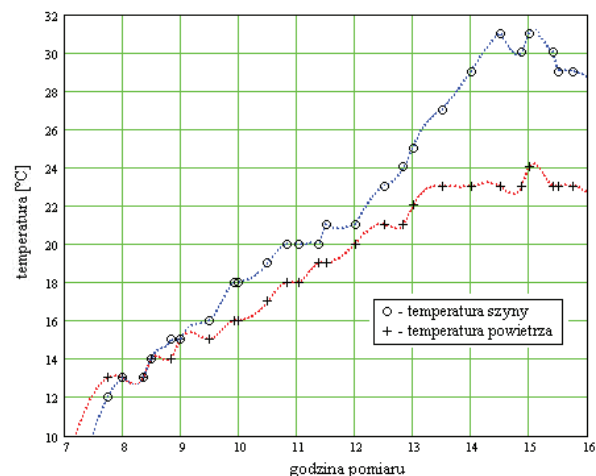
3. Zależność stałej oporu podłużnego skumulowanego od stałej termicznej toru



4. Zależność oporu podłużnego podsypki od przemieszczeń szyny dla różnych temperatur



5. Zależność przemieszczeń zluźnionej szyny od temperatury [6]



6. Zależność temperatury szyny i powietrza od godziny pomiaru (badania Aurora)

## Nierównomierny rozkład temperatury na długości bezстыkowego toru kolejowego

Temperatura szyn zależy od wielu zmiennych czynników. Główne z nich mają charakter naturalny, takie jak: temperatura powietrza i podłoża, wilgotność podłoża, intensywność promieniowania słonecznego, zachmurzenie, przezroczystość atmosfery, siła i kierunek wiatru i in. Stwierdza się na ogół zależność między temperaturą szyny i powietrza (rys. 6) (mierzoną w tym samym miejscu i czasie), którą można przedstawić w postaci związku:  $t = t_0 + \tilde{t}_z$ , gdzie:  $t$  - temperatura szyny,  $t_0$  - temperatura powietrza, a  $\tilde{t}_z$  - zmienna wielkość losowa, zależna w okresie wysokich temperatur przede wszystkim od intensywności nasłonecznienia toru.

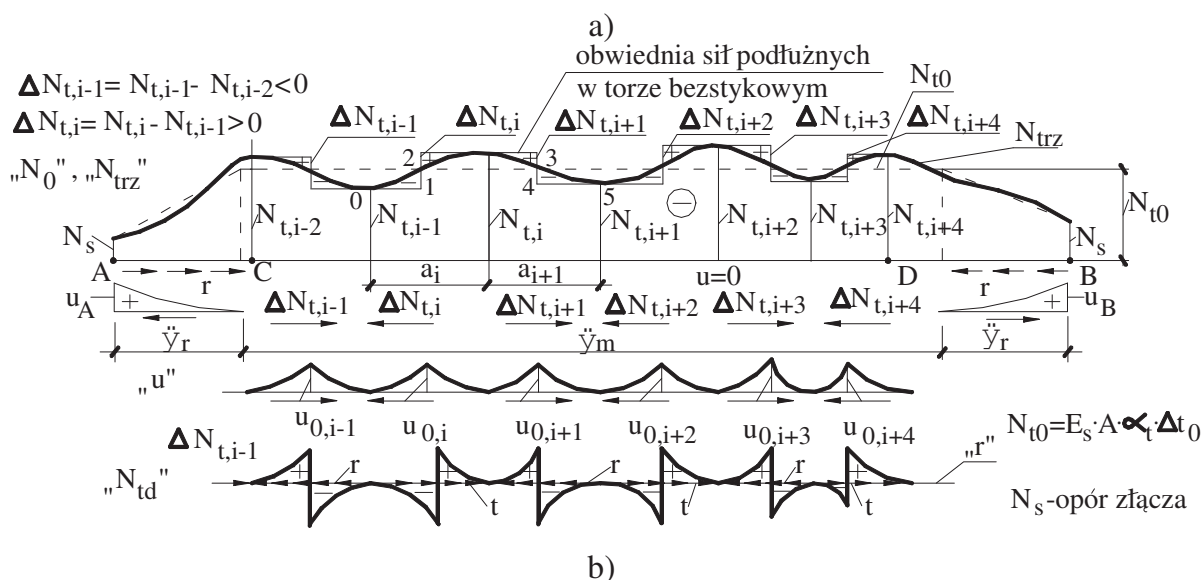
W warunkach pracy toru bezстыkowego w terenie występują nierównomierne rozkłady temperatur szyn, zarówno wzdłuż długości toru, jak i w jego przekroju poprzecznym (mierzona różnica temperatury między główką i stopką szyny może wynosić nawet 7 [°C]).

Rozpatrując zjawisko lokalnych stref poziomych przemieszczeń toru bezстыkowego od nierównomiernych rozkładów temperatury szyn  $t$ , należy uwzględnić również, oprócz zmiennego po długości oporu podłużnego podsypki, zmienne warunki termiczne, występujące podczas montażu toru, które charakteryzuje zmienna na ogół temperatura przytwierdzenia szyn do podkładów  $t_p$ . Występująca wówczas w przekrojach poprzecznych toru zmienna różnica temperatur:  $\Delta_t = t - t_p$ , wywołuje w rzeczywistym torze bezстыkowym nierównomierny rozkład podłużnej siły termicznej  $N_t = \alpha_t \cdot E_s \cdot A \cdot \Delta t$ , której przebieg pokazano schematycznie linią ciągłą na rys. 7. Nierównomierność tę powiększa dodatkowo wpływ pełzania eksploatowanego toru bezстыkowego pod ruchem pociągów, który powoduje niekorzystne zmiany w układzie temperatur. Linia kreskowana na rys. 7 oznacza natomiast **obliczeniowy rozkład siły termicznej**  $N_{t0}$ . Dla rozkładu  $N_{t0}$  w części środkowej CD ( $N_{t0} = const.$ ) mamy  $u = 0$  (brak przemieszczeń podłużnych – odcinek *nieruchomy*). Natomiast  $u \neq 0$  (parabola 2<sup>o</sup>) występuje na tzw. odcinkach *rucho-nych* (*oddychających*) o długości  $l_r$  gdzie  $N_{t0}$  ma rozkład liniowy ( $r = r_g$ , rys. 2a). Rozkład obliczeniowy (trapezowy)  $N_{t0}$  na rys. 7 odpowiada szczególnemu przypadkowi zachowania się prostego toru bezстыkowego przy równomiernym wzroście temperatury na całej jego długości, dla  $t_p = const.$

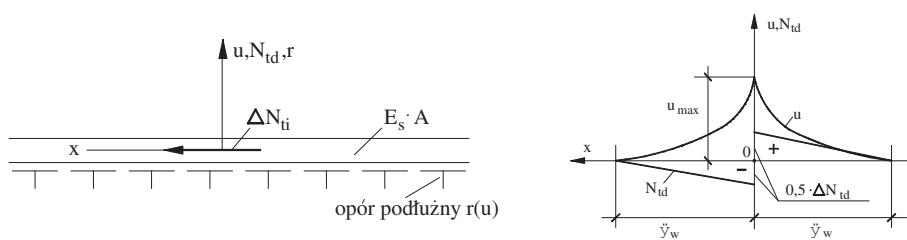
Stan przemieszczeń osiowych w torze bezстыkowym od wpływu lokalnych zmian temperatur

## Stan przemieszczeń osiowych w torze bezстыkowym od wpływu lokalnych zmian temperatur

Powstające w wyniku miejscowych różnic temperatury szyny siły  $\Delta N$  na długości toru, pokazane schematycznie na rys. 7, wywołują lokalne, strefowe przemieszczenia poziome przekrojów poprzecznych szyny, o wartościach maksymalnych od  $u_{0,i-1}$  do  $u_{0,i+4}$  [1,3,4,11]. Przemieszczenia osiowe toru wzbudzają z kolei reakcję poziomą podłoża  $r(u)$  w takim



7. Rozkład siły termicznej na długości bezстыkowego toru kolejowego  
 a) nierównomierny rozkład siły termicznej ( $N_{trz}$ ) na długości bezстыkowego toru kolejowego oraz przemieszczeń podłużnych toru ( $u$ ) i dodatkowej siły termicznej ( $N_{td}$ ); b) powstający opór podłużny podłoża podsypkowego ( $r$ ) oraz sztywność na zginanie ( $E_s I_{\zeta}$ ) i poprzeczna ( $E_s A$ ) toru kolejowego



8. Schemat obliczeniowy i przebiegi funkcji  $u$  (przemieszczenie podłużne) i  $N_{td}$  (dodatkowa siła termiczna)



9. Pomiar przemieszczenia podłużnego toru kolejowego w zależności od temperatury (zdjęcie Autora)

stopniu, na jaki pozwala wartość  $u$ . Funkcję  $r(u)$ , dla celów analizy można opisać przy pomocy kilku modeli pokazanych na rys. 2.

Dla przykładu rozważmy wpływ siły  $\Delta N_{ti} = N_{t,i} - N_{t,i-1} = E_s \cdot A \cdot (\Delta t_i - \Delta t_{i-1})$  na pracę toru, przyjmując najniekorzystniejszą  $r = r_g$  (model z rys. 2a). Otrzymamy wówczas wzory na  $u$ ,  $N_{td}$  i  $l_w$  (schematy obliczeniowe i przybliżony przebieg funkcji  $u$  i  $N_{td}$  w układzie lokalnym, pokazano na rys. 8):

$$u = \frac{r_g}{2 \cdot E_s \cdot A} \cdot x^2 - \frac{\Delta N_{ti}}{2 \cdot E_s \cdot A} \cdot x + \frac{\Delta N_{ti}^2}{8 \cdot E_s \cdot A \cdot r_g} \quad (6)$$

$$N_{td} = r_g \cdot x - \frac{\Delta N_{ti}}{2}, \quad l_w = \frac{\Delta N_{ti}}{2 \cdot r_g} \quad (7)$$

Dla modelu sprężystego z rys. 2b, przy  $r = k_1 \cdot u$ , mamy:

$$u = \frac{\Delta N_{ti}}{2 \cdot E_s \cdot A \cdot \sqrt{\alpha}} \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot x},$$

$$N_{td} = -\frac{\Delta N_{ti}}{2} \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot x},$$

$$l_w = \infty \text{ oraz } \alpha = k_1 / (E_s \cdot A). \quad (8)$$



Z kolei dla modelu z rys. 2d, przy  $r = r_0 + k_1 \cdot u$ , otrzymujemy:

$$u = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \left[ 1 - \cosh\left(\sqrt{\alpha} \cdot x\right) \mp \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\Delta N_{ii} \cdot \sqrt{\alpha}}{2 \cdot \beta \cdot E_S \cdot A}\right) \right], \quad (9)$$

$$N_{td} = \frac{\beta \cdot E_S \cdot A}{\sqrt{\alpha}} \cdot \left[ \sinh\left(\sqrt{\alpha} \cdot x\right) \mp \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\Delta N_{ii} \cdot \sqrt{\alpha}}{2 \cdot \beta \cdot E_S \cdot A}\right) \right], \quad (10)$$

$$l_w = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\Delta N_{ii} \cdot \sqrt{\alpha}}{2 \cdot \beta \cdot E_S \cdot A}\right), \quad (11)$$

gdzie:  $\alpha = k_1 / (E_S \cdot A)$ ,  $\beta = r_0 / (E_S \cdot A)$ ,  $k_1$  – współczynnik sztywności poziomej podłoża [MPa].

## Określenie parametrów oporu podłużnego do obliczeń

W eksploatowanym torze kolejowym rzeczywiste wartości np.  $k_1$  i  $r_0$  dla modelu  $d$  ( $r = r_0 + k_1 \cdot u$ ) oporu sprężysto-plastycznego podłoża podsypanego z rys. 2 są nieznane. Dla określonych warunków brzegowych [14] oraz z uwzględnieniem modelu  $d$  z rys. 2, otrzymujemy:

$$u(x) = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left[ 1 - \cosh\left(\sqrt{\alpha} \cdot x - \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\alpha \cdot \Delta t \cdot \sqrt{\alpha}}{\beta}\right)\right) \right], \quad (12)$$

gdzie:  $\alpha = k_1 / (E_S \cdot A)$ ,  $\beta = r_0 / (E_S \cdot A)$ ,  $x$  – odcięta dowolnego przekroju toru, mierzona od końca rozpatrywanego toru bezстыkowego. Korzystając z wyników bezpośrednich pomiarów przemieszczeń osiowych  $u^p$  toru bezстыkowego można podać sposób ich obliczenia (metodą najmniejszych kwadratów) [14]:

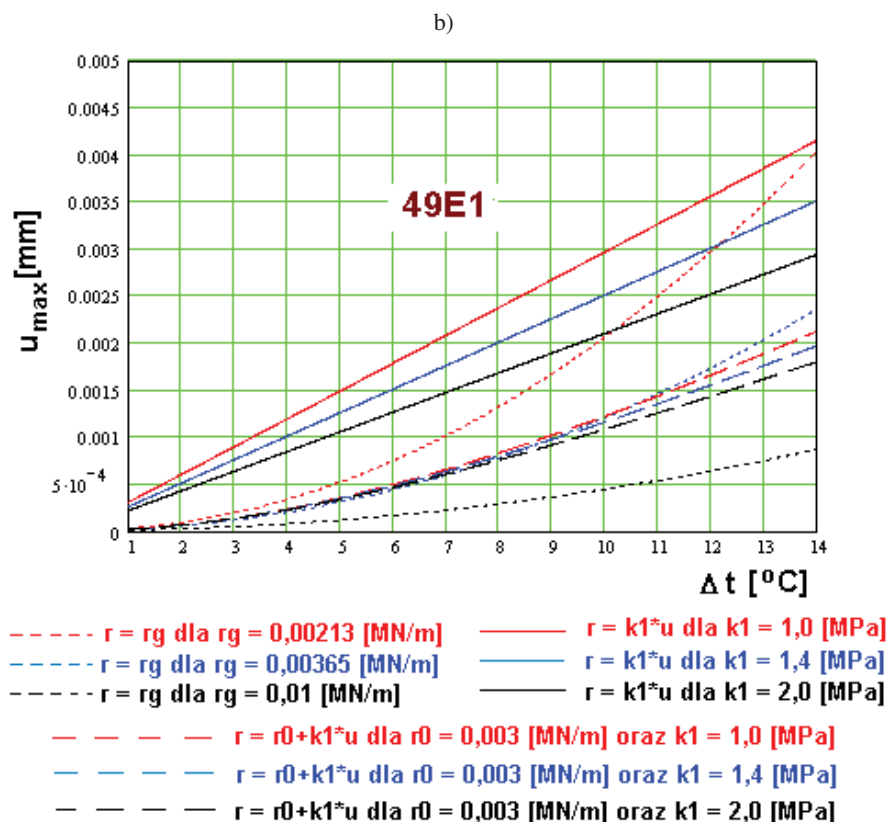
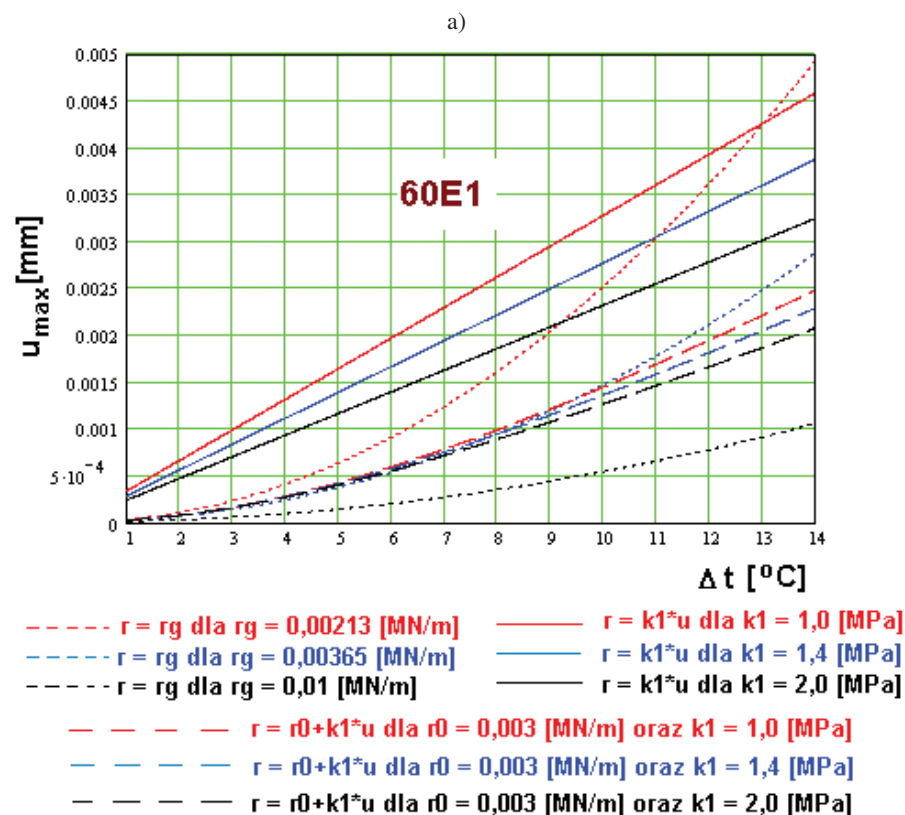
$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n V_{ji}^2 = \min, \text{ gdzie: } V_{ji} = u_{ji}(x) - u_{ji}^p, \quad (13)$$

przy czym:  $u_{ji}(x) = F_{ij}(x, \Delta t, \alpha, \beta)$  oznacza przemieszczenia obliczone dla wstępnie oszacowanych wartości  $k_1$  i  $r_0$ , czyli  $\alpha_0$  i  $\beta_0$ ,  $u_{ji}^p$  oznacza wielkości mierzone odpowiadające  $u_{ji}(x)$ ,  $j = 1,$

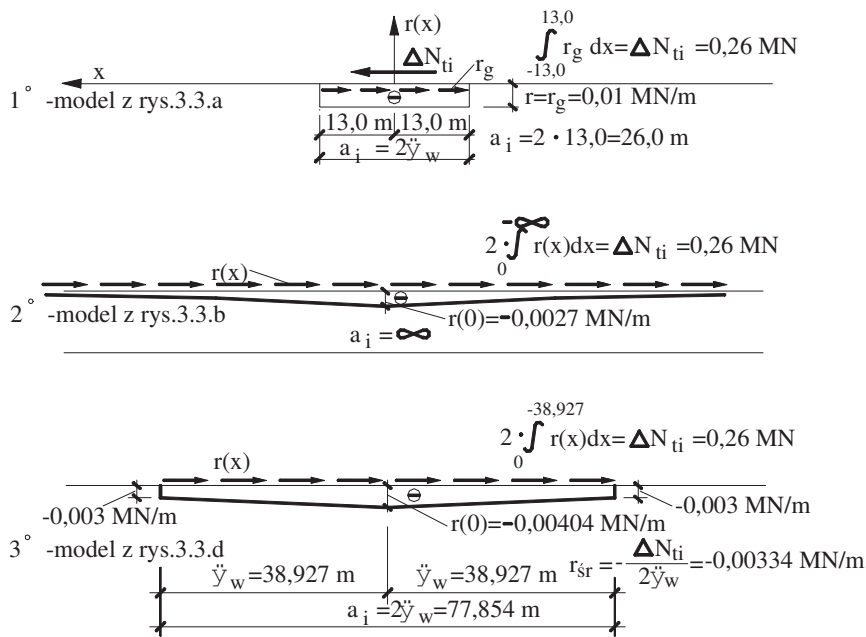
$2, \dots, m$  oznacza kolejną różnicę,  $\Delta t$  dla której określa się wartość funkcji (12) i dokonuje pomiaru  $u_{ji}^p$  oraz  $i = 1, 2, \dots, n$  oznacza miejsce pomiaru, czyli odciętą pewnego wybranego przekroju

szyny (rys. 9).

Różnice  $V_{ji}$  wynikają przede wszystkim z występujących wzdłuż toru zmian oporu podłużnego podłoża oraz z błędów pomiaru. Korzystając z



10. Maksymalne przemieszczenia toru wskutek lokalnej różnicy temperatury  $\Delta(\Delta t)$  dla przyjętych modeli obliczeniowych (wzory 6-11)  
a) tor z szynami 60E1; b) tor z szynami 49E1



11. Rozkłady funkcji  $r(x)$  dla różnych modeli obliczeniowych [2,3]

równania (13) oblicza się niewiadome poprawki  $\delta(\alpha)$  i  $\delta(\beta)$  w kolejnych krokach iteracyjnych, aż do przyjętego z góry błędu przybliżenia. W wyniku obliczeń otrzymuje się:  $\alpha = \alpha_0 + \sum \delta(\alpha)$  i  $\beta = \beta_0 + \sum \delta(\beta)$ , które stanowią możliwie najdokładniej określoną charakterystykę oporu podłużnego dla danego toru kolejowego.

W pracy [14] na doświadczalnym poligonie bezстыkowego toru kolejowego na linii kolejowej Katowice-

Kraków, otrzymano następujące wartości:  $r_0 = 9,728 \cdot 10^{-4} \pm 2,883 \cdot 10^{-4}$  MN/m, oraz  $k_1 = 1,8976 \pm 0,1589$  MN/m<sup>2</sup>. Potwierdzenie tych wartości znajdujemy na rys. 1.

### Przykłady obliczeniowe

Do obliczeń przyjęto zatem następujące dane:

- tor bezстыkowy 49E1 i 60E1, z podkładami drewnianymi, na

podsypanie tłuczniowej, w układzie lokalnym (rys. 8), odpowiednio przy wartościach [1,3-5,13,16]:

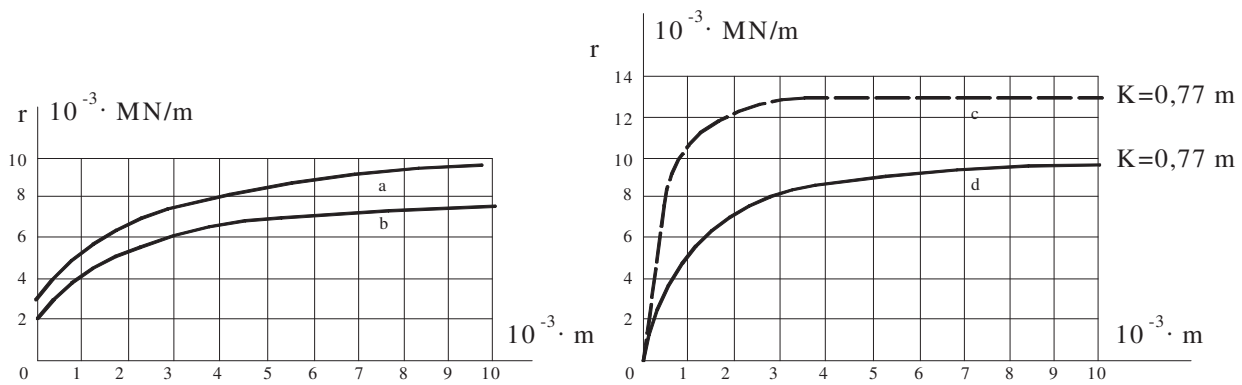
- $E_s \cdot A = 2644,74$  MN (49E1);  $E_s \cdot A = 3228,12$  MN (60E1) oraz:
- $\alpha_t = 1,15 \cdot 10^{-5}$  1/K,  $r_0 = 0,003$  MN/m,  $r_g = 0,010$  MN/m,
- $k_1 = 1,0$  MPa,  $k_1 = 1,4$  MPa oraz  $k_1 = 2,0$  MPa przy  $u_g = 0,005$  m (patrz rys. 1 i rys. 2),
- $\Delta(\Delta t)_i = 1, 2, \dots, 14$  [K].

W celu zobrazowania uzyskanych maksymalnych przemieszczeń toru, na rys. 10 pokazano wyniki obliczeń dla przyjętych wyżej parametrów oraz modeli opisanych na tys. 1 i 2 niniejszej pracy.

Jak widać na rys. 10 najmniejsze przemieszczenia otrzymujemy dla modelu plastycznego przy przyjętej największej wartości oporu ( $r_g = 0,01$  [MN/m]). Natomiast największe przemieszczenia otrzymujemy dla modelu sprężystego przy przyjętej najmniejszej wartości oporu ( $k_1 = 1,0$  [MPa]). Należy to tłumaczyć właściwościami analizowanych modeli (rys. 2). Dla modelu plastycznego, od samego początku przemieszczenia toru powstaje opór podłużny podłoża podsypkowego ( $r=r_g$ ), natomiast dla modelu sprężystego, opór ten

Tab. 2. Przemieszczenia podłużne  $u(x)$ , rozkład siły termicznej  $N_t(x)$  i oporu poprzecznego  $r(x)$  w zależności od przyjętego modelu obliczeniowego

1° – dla modelu z rys. 2a ( $r=r_g$ ) otrzymujemy: 1	2° – dla modelu z rys. 2b ( $r=k_1 \cdot u$ ) otrzymujemy: 2	3° – dla modelu z rys. 2d ( $r=r_0+k_1 \cdot u$ ) otrzymujemy: 3
$u = 1,55 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 \mp 4,03 \cdot 10^{-5} \cdot x + 2,62 \cdot 10^{-4}$ <p>dla: <math>x &gt; 0</math>, (-), <math>x &lt; 0</math>, (+).</p> <p>Dla <math>x = 0</math>, <math>u_{\max} = 2,62 \cdot 10^{-4}</math> m przy <math>u_g = 5,0 \cdot 10^{-3}</math> m</p> <p>oraz <math>N_{td} = 0,01 \cdot x \mp 0,130</math>, <math>x &gt; 0</math>, (-), <math>x &lt; 0</math> (+)</p> <p><math>l_w = 13,0</math> m</p> <p><math>r = r_g = -E_s \cdot A \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} = -0,01</math> MN / m</p>	$\alpha = \frac{k_1}{E_s \cdot A} = 4,337 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-2}, \sqrt{\alpha} = 2,0826 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1}$ $u = 1,934 \cdot 10^{-3} \cdot \exp(\mp 2,0826 \cdot 10^{-2} \cdot x)$ <p>dla <math>x &gt; 0</math>, (-), <math>x &lt; 0</math>, (+).</p> <p>Dla <math>x = 0</math>: <math>u_{\max} = 1,934 \cdot 10^{-3}</math> m przy <math>u_g = 5,0 \cdot 10^{-3}</math> m</p> <p><math>r = -E_s \cdot A \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} = -k_1 \cdot u =</math> <math>= -2,708 \cdot 10^{-3} \cdot \exp(\mp 2,0826 \cdot 10^{-2} \cdot x)</math> dla <math>x = 0</math>, <math>r_{\min} = -2,708 \cdot 10^{-3}</math> MN / m</p> <p><math>N_{td} = E_s \cdot A \cdot \frac{du}{dx} = \mp 0,130 \cdot \exp(\mp 2,0826 \cdot 10^{-2} \cdot x)</math></p> <p><math>l_w = \infty</math>, <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} N_{td} = 0</math>, <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} r = 0</math></p>	$\alpha = 4,337 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-2}, \beta = \frac{r_0}{E_s \cdot A} = 9,2937 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1}$ $u = -2,143 \cdot 10^{-3} \cdot \left[ 1 - \cosh\left( \frac{2,0826 \cdot 10^{-2} \cdot x \mp \arcsinh(0,9025)}{\sqrt{\alpha}} \right) \right]$ <p>dla: <math>x &gt; 0</math>, (-), <math>x &lt; 0</math>, (+)</p> <p><math>u = -2,143 \cdot 10^{-3} \cdot \left[ 1 - \cosh(2,0826 \cdot 10^{-2} \cdot x \mp 0,8107) \right]</math> dla <math>x = 0</math>: <math>u_{\max} = -2,143 \cdot 10^{-3} \cdot (1 - 1,347) = 0,7436 \cdot 10^{-3}</math> m przy <math>u_g = 5,0 \cdot 10^{-3}</math> m</p> <p><math>N_{td} = E_s \cdot A \cdot \frac{du}{dx} = 0,144 \cdot \sinh(2,0826 \cdot 10^{-2} \cdot x \mp 0,8107)</math> dla <math>x = 0</math>: <math>N_{td} = \mp 0,13</math> MN</p> <p><math>l_w = 38,927</math> m; dla <math>x = l_w</math>: <math>u = 0</math>, <math>N_{td} = 0</math></p> <p><math>r = -E_s \cdot A \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} = -0,003 \cdot \cosh(2,0826 \cdot 10^{-2} \cdot x \mp 0,8107)</math> dla <math>x = \pm l_w</math>, <math>r = -0,003</math> MN / m</p> <p>dla <math>x = 0</math>, <math>r = -1,347 \cdot 0,003 = -0,00404</math> MN / m</p> <p><math>\omega = \int_0^{l_w} r dx = 0,130</math> MN, <math>r_g = -\frac{\omega}{l_w} = -0,00334</math> MN / m</p>



12. Charakterystyki doświadczalne oporu podłużnego podsypki [6]

a - opór podłużny przy rozstawie podkładów drewnianych 65 cm (przeszło 22 podkłady)

b - opór podłużny przy rozstawie podkładów drewnianych 65 cm (przeszło 11 podkładów)

c - opór podłużny przy zmiennym rozstawie podkładów drewnianych (K-rozstaw podkładów)

d - opór podłużny przy zmiennym rozstawie podkładów strunobetonowych (K-rozstaw podkładów)

wzrasta dopiero wraz z powstającym przemieszczeniem. Dla wykazania powstających różnic wynikających z przyjętych modeli (rys. 2) wykonano obliczenia przy następujących danych: tor bezстыkowy 60E1, z podkładami drewnianymi, na podsypce tłuczniowej, w układzie lokalnym (rys. 8) oraz:  $E_s \cdot A = 3228 \text{ MN}$ ,  $\alpha_t = 1,15 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$ ,  $r_0 = 0,003 \text{ MN/m}$ ,  $r_g = 0,010 \text{ MN/m}$ ,  $k_1 = 1,4 \text{ MPa}$ ,  $u_g = 0,005 \text{ m}$ . Ponadto przyjęto:  $\Delta(\Delta t)_i = 7,0 \text{ [K]}$ , gdzie:  $\Delta(\Delta t)_i = \Delta N_{ti} / E_s \cdot A \cdot \alpha_t$ , przy czym  $\Delta N_{ti} = N_{ti} - N_{t,i-1} = E_s \cdot A \cdot \alpha_t \cdot (\Delta t_i - \Delta t_{i-1})$ ,  $\Delta t_i = t_i - t_{pi} - t_s$ ,  $\Delta t_{i-1} = t_{i-1} - t_{p,i-1} - t_s$ ,  $t$  – temperatura szyny,

$t_p$  – temperatura przytwierdzenia szyny do podkładów,  $t_s = N_s / E_s \cdot A \cdot \alpha_t$ ,  $N_s$  – reakcja pozioma styku szynowego od wpływów termicznych, ( $N_s \approx 0,20 \text{ MN}$ ),  $\Delta(\Delta t)_i = \Delta t_i - \Delta t_{i-1} = (t_i - t_{i-1}) - (t_{pi} - t_{p,i-1})$ .

Stąd  $\Delta N_{ti} = E_s \cdot A \cdot \alpha_t \cdot \Delta(\Delta t)_i = 0,26 \text{ MN}$ . Wyniki obliczeń pokazano w tabl. 2: Na rys. 11 przedstawiono przebiegi obliczonych funkcji  $r(x)$  dla uzyskanych wartości  $l_w$ ;

## Dyskusja otrzymanych wyników

Przydatność zastosowanych mode-

li podłoża do analizy przemieszczeń osiowych toru bezстыkowego jest różna. Dla dużych przyrostów temperatury  $\Delta t$ , np.  $\Delta t = 45 \text{ K}$ , którym towarzyszą wysokie wartości siły termicznej w szynach, tor bezстыkowy doznaje znacznych przesunięć osiowych, większych od  $u_g$ , co ma miejsce przede wszystkim w strefach tzw. odcinków oddychających, to wówczas przydatnym okaże się model plastyczny (rys. 2a). Natomiast do analizy wpływu lokalnych nierównomiernych zmian temperatury na długości toru, właściwym w dalszym zastosowaniu

Tab. 3. Przemieszczenia podłużne  $u(x)$ , rozkład siły termicznej  $Nt(x)$  i oporu poprzecznego  $r(x)$  w zależności od przyjętego modelu obliczeniowego

1° – dla modelu z rys. 2a ( $r = r_g$ ) otrzymujemy:	2° – dla modelu z rys. 2b ( $r = k_1 \cdot u$ ) otrzymujemy:	3° – dla modelu z rys. 2d ( $r = r_0 + k_1 \cdot u$ ) otrzymujemy:
<p>dla <math>r_g = 0,002131 \text{ [MN/m]}</math></p> $u = 3,31 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 \mp 4,03 \cdot 10^{-5} \cdot x + 1,23 \cdot 10^{-3}$ <p><math>u(0) = u_{max}^1 = 1,23 \cdot 10^{-3} \text{ m}; l_w = 61,0 \text{ m}</math></p> <p>dla <math>r_g = 0,00365 \text{ [MN/m]}</math></p> $u = 5,65 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 \mp 4,03 \cdot 10^{-5} \cdot x + 7,17 \cdot 10^{-4}$ <p><math>u(0) = u_{max}^2 = 7,17 \cdot 10^{-4} \text{ m}; l_w = 35,62 \text{ m}</math></p> <p>dla <math>r_g = 0,01 \text{ [MN/m]}</math></p> $u = 1,55 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 \mp 4,03 \cdot 10^{-5} \cdot x + 2,62 \cdot 10^{-4}$ <p><math>u(0) = u_{max}^3 = 2,62 \cdot 10^{-4} \text{ m}; l_w = 13,0 \text{ m}</math> przy czym dla: <math>x &gt; 0, (-), x &lt; 0, (+)</math></p> <p><math>u_{max}^3 &lt; u_{max}^2 &lt; u_{max}^1 &lt; u_g</math> dla <math>u_g = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}</math> oraz odpowiednio:</p> $r = -E_s \cdot A \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} = r_g$ $N_{td} = r_g \cdot x - \frac{\Delta N_{ti}}{2}$ <p><math>x &gt; 0, (-), x &lt; 0, (+)</math></p>	<p>dla <math>k_1 = 2,0 \text{ [MPa]}</math></p> $\alpha = \frac{k_1}{E_s \cdot A} = 6,196 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-2}, \sqrt{\alpha} = 2,4891 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1}$ $u = 1,618 \cdot 10^{-3} \cdot \exp(\mp 2,4891 \cdot 10^{-2} \cdot x)$ <p>dla <math>x &gt; 0, (-), x &lt; 0, (+)</math>.</p> <p>dla <math>x = 0: u_{max} = 1,618 \cdot 10^{-3} \text{ m}</math> przy <math>u_g = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}</math></p> $r = -E_s \cdot A \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} = -k_1 \cdot u =$ $= -3,236 \cdot 10^{-3} \cdot \exp(\mp 2,4891 \cdot 10^{-2} \cdot x)$ <p>dla <math>x = 0, r_{min} = -3,236 \cdot 10^{-3} \text{ MN/m}</math></p> $N_{td} = E_s \cdot A \cdot \frac{du}{dx} = \mp 0,130 \cdot \exp(\mp 2,4891 \cdot 10^{-2} \cdot x)$ $l_w = \infty, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} N_{td} = 0, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} r = 0$	<p>dla <math>k_1 = 2,0 \text{ [MPa]}</math> i <math>r_0 = 0,003 \text{ [MN/m]}</math></p> $\alpha = 6,196 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-2}, \beta = \frac{r_0}{E_s \cdot A} = 9,2937 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1}$ $u = -1,5 \cdot 10^{-3} \cdot \left[ 1 - \cosh(2,4891 \cdot 10^{-2} \cdot x \mp \operatorname{arcsinh}(1,0786)) \right]$ <p>dla: <math>x &gt; 0, (-), x &lt; 0, (+)</math></p> $u = -1,5 \cdot 10^{-3} \cdot \left[ 1 - \cosh(2,4891 \cdot 10^{-2} \cdot x \mp 0,9359) \right]$ $u(0) = u_{max} = -1,5 \cdot 10^{-3} \cdot (1 - 1,471) = 0,7063 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ <p>dla <math>u_g = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}</math></p> $N_{td}(x) = E_s \cdot A \cdot \left( \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \cdot \sinh(\sqrt{\alpha} \cdot x - a \sinh(\frac{\Delta N_{ti}}{2} \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta \cdot E_s \cdot A})) \right)$ $N_{td} = E_s \cdot A \cdot \frac{du}{dx} = 0,1205 \cdot \sinh(2,4891 \cdot 10^{-2} \cdot x \mp 0,9359)$ <p>dla <math>x = 0: N_{td} = \mp 0,13 \text{ MN}</math></p> <p><math>l_w = 37,599 \text{ m}</math>; dla <math>x = l_w</math> mamy: <math>u = 0, N_{td} = 0</math></p> $r = -E_s \cdot A \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} = -0,003 \cdot \cosh(2,4891 \cdot 10^{-2} \cdot x \mp 0,9359)$ <p>dla <math>x = \pm l_w, r = -0,003 \text{ MN/m}</math></p> <p>dla <math>x = 0, r = -1,471 \cdot 0,003 = -0,004413 \text{ MN/m}</math></p> $\omega = \int_0^{-l_w} r dx = 0,130 \text{ MN}, r_g = -\frac{\omega}{l_w} = -0,003475 \text{ MN/m}$

jest raczej model oporu podłużnego podsypki z rys. 2d. Przydatność modelu sprężystego (rys. 2b), często wykorzystywanego efektywnie w zakresie np. analizy wybożenia toru w płaszczyźnie pionowej, jest w rozważanym przypadku nierównomiernych zmian temperatury raczej ograniczona.

Z drugiej strony przyjmowanie do obliczeń np. zbyt dużych wartości współczynnika sztywności poziomej podłoża  $k_1 = 5 \div 10$  [MPa], nie znajduje w pełni potwierdzenia w wynikach badań doświadczalnych oporu podłużnego podsypki (patrz rys. 12). Dlatego rozsądnym kompromisem jest przyjęcie następujących wartości parametrów:  $r_0 = 0,003$  MN/m,  $r_g = 0,01$  MN/m,  $k_1 = 2,0$  MPa,  $u_g = 0,005$  m, które znajdują uzasadnienie zarówno na rys. 2 jak i rys. 12:

Dla tych parametrów i wspomnianych wyżej modeli ( $a$ ,  $b$  i  $d$ ) z rys. 2 oblicza się:

## Wnioski końcowe:

Na podstawie przeprowadzonej analizy można stwierdzić, że:

- 1) Przedstawione w pracy analityczne rozwiązanie do zagadnienia lokalnej różnicy temperatury na długości bezстыkowego toru kolejowego wykazało powstawanie niepożądanych podłużnych jego przemieszczeń.
- 2) Przedstawiono analizę teoretyczną czynników powodujących przemieszczenia podłużne toru wykorzystując zastępcze modele obliczeniowe rzeczywistych charakterystyk uzyskiwanych w torze kolejowym (rys. 2 czy rys. 12).
- 3) Wyniki obliczeń pokazane na rys. 10 wskazują, że największe przemieszczenie wskutek różnicy temperatury zależy głównie od gradientu temperatury oraz parametrów przyjętych modeli obliczeniowych ( $r_g$ ,  $r_0$  i  $k_1$ ) i sztywności podłużnej toru ( $E_s \cdot A$ ). Przemieszczenia wynikające z nierównomiernego ogrzania szyny na jej długości (np. położona w zacienionym głębokim wykopie czy

wystawiona na insolację słoneczną w nasypie), stanowią istotną, niedocenianą część przemieszczeń, które mogą nasilać m.in. pełzanie toru.

- 4) Wskazano na znaczący wpływ analizowanych modeli i przyjętych parametrów do obliczeń ( $r_g$ ,  $r_0$  i  $k_1$ ) na kształt i wartości podłużnych przemieszczeń poziomych toru kolejowego (rys. 10).
- 5) Na podstawie przeprowadzonych obliczeń i analiz rzeczywistych charakterystyk uzyskiwanych w torze kolejowym zaproponowano odpowiednie parametry do obliczeń (wykorzystane w zamieszczonych tabl. 2 i tabl. 3). ◀

## Materiały źródłowe

- [1] Bednarek Wł.: Practicability of longitudinal resistance models for effect analysis of local temperature change on axial displacement state in CWR track. 13th International Conference on Modernisation of Railway tracks, Slovakia, Žilina, 2003,
- [2] Bednarek Wł.: Loss of contact analysis in jointless track on ballast due to influence of non-axial horizontal subsoil reaction transfer. Archives of Civil Engineering, L, 3, 2004,
- [3] Bednarek Wł.: Influence of ballast longitudinal resistance on axial displacement state in CWR track due to local rail temperature changes. Foundations of Civil and Environmental Engineering, Poznań University of Technology, No.12, 2008,
- [4] Bednarek Wł.: Wpływ oporu podłużnego podłoża podsypkowego na przemieszczenia osiowe bezстыkowego toru kolejowego wskutek lokalnej różnicy temperatury. Archiwum Instytutu Inżynierii Lądowej (Archives of Institute of Civil Engineering), Poznań University of Technology, Nr 11, 2011,
- [5] Bednarek Wł.: Wpływ pionowych odkształceń nawierzchni i podtorza na pracę toru bezстыkowego. Seria Rozprawy Nr 506, Wydaw-

nictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2013,

- [6] Bogdaniuk B.: Stateczność toru bezстыkowego w procesie jego eksploatacji. Praca doktorska, Poznań, 1972,
- [7] Czyczuła Wł., Towpik K.: Kryterium oceny nawierzchni kolejowej z uwagi na trwałe podłużne przemieszczenia szyn. IX Krajowa Konferencja Naukowo-Techniczna „Drogi Kolejowe”, Kraków, 1997,
- [8] Czyczuła Wł., Towpik K.: Problemy modelowania oraz identyfikacji modeli toru bezстыkowego. Problemy kolejnictwa, zeszyt 128, Warszawa, 1998,
- [9] Dieterman H. A., Van M. A., Van Dam A. J. P., Esveld C.: Longitudinal forces in railroad structures. Rail Engineering International, No. 1, 1990,
- [10] Frýba L.: Distribution “quasi-statique” des forces de démarrage et de freinage dans les rails et les ponts. Rail International, Février, 1975,
- [11] Huber M. T.: Pisma. Zagadnienia kolejowe. Tom III, Dział VIII, PWN, Warszawa, 1957,
- [12] Markine V., Esveld C.: Analysis of longitudinal and lateral behaviour of a CWR track using a computer system LONGIN. Delft University of Technology, 1999,
- [13] PKP: Przepisy Id-1 (D-1) Warunki techniczne utrzymania nawierzchni na liniach kolejowych, Warszawa, 2005 z późn. zmianami,
- [14] Szumierz W.: Warunki stosowania torów bezстыkowych na terenach eksploatacji górniczej. Temat 3001/16, 1972,
- [15] Szumierz W.: Statyka budowli liniowych poddanych działaniu sił poziomych od pełzania podłoża górniczego. Główny Instytut Górnictwa, Katowice, 1980,
- [16] Szumierz W., Stefanek J.: Model współdziałania mostu z torrem bezстыkowym w warunkach zmian temperatury. Drogi i Mosty, nr 2, 2004,
- [17] Van M. A.: Stability of continuous welded rail track. Delft 1995.