

# Wygładzona krzywa przejściowa dla dróg kolejowych

## Smoothed transition curve for railways



**Władysław Koc**

Prof.dr hab.inż.

Politechnika Gdańska, Katedra  
Transportu Szynowego i Mostów

kocwl@pg.edu.pl

**Streszczenie:** W artykule zwrócono uwagę na występujące trudności w eksploatacji krzywych przejściowych stosowanych w układach geometrycznych toru kolejowego. Wskazano na trudności w praktycznej realizacji i utrzymaniu bardzo małych rzędnych poziomych krzywej przejściowej i rzędnych rampy przechyłkowej w rejonie początkowym, występujących na gładkich krzywych przejściowych. Jako podstawową przyczynę takiej sytuacji uznano nadmierne wyłagodzenie krzywizny w ich rejonie początkowym. Wykorzystując metodę identyfikacji krzywizny za pomocą równań różniczkowych, uzyskano nową postać krzywej, którą określono mianem „wygładzonej krzywej przejściowej”. Wykazano zdecydowaną przewagę tej krzywej, z realizacyjnego punktu widzenia, nad reprezentującą gładkie krzywe przejściowe krzywą Blossa. Jak się wydaje, mogłaby ona z powodzeniem konkurować z powszechnie obecnie stosowaną klotoidą, do której jest podobna w rejonie początkowym, natomiast różni się istotnie na swojej dalszej długości, a zwłaszcza w rejonie końcowym, gdzie zapewnia łagodne wejście z krzywej przejściowej w łuk kołowy.

**Słowa kluczowe:** Układ geometryczny toru; Krzywa przejściowa; Analiza rzędnych

**Abstract:** The article draws attention to the existing situation in the area of transition curves used in the geometric layouts of the railway track. Difficulties in the practical implementation and maintenance of very small horizontal ordinates of the transition curve and the ordinates of the gradient due to cant in the initial section, appearing on smooth transition curves, were indicated. The main reason for this situation was the excessive smoothing of the curvature in their initial section. Employing the method of curvature identification by differential equations, a new form of the curve was obtained, which was referred to as the "smoothed transition curve". A definite advantage of this curve was shown, from the implementation point of view, over representing the smooth transition curves of the Bloss curve. It seems that it could successfully compete with the commonly used clothoid, to which it is similar in the initial section, while it differs significantly along its further length, especially in the final section, where it provides a gentle entry from the transition curve into a circular arc.

**Keywords:** Railway layout; Transition curve; Ordinates analysis

Jak powszechnie wiadomo, stosowanie krzywych przejściowych ma na celu zapewnienie ciągłej zmiany niezrównoważonego przyspieszenia bocznego pomiędzy odcinkami trasy o zróżnicowanej krzywiznie, w sposób korzystny dla dynamiki oddziaływań w układzie droga – pojazd. Problematyka krzywych przejściowych w drogach kołowych i kolejowych jest wciąż aktualna. Trwają poszukiwania nowych postaci krzywych [2-4, 6, 7-9, 15, 20-25].

Należy zaznaczyć, że krzywe przejściowe są też w różny sposób definiowane. Dla dróg kołowych są one często określane przez podanie funkcji kąta  $\Theta(l)$ , o jaki zmienia się kierunek

osi podłużnej pojazdu po przebyciu pewnego łuku. W drogach kolejowych dominuje tradycyjne uproszczenie, polegające na operowaniu krzywizną  $k(x)$  w układzie współrzędnych prostokątnych.

Wartości przyspieszeń na długości krzywej przejściowej wynikają z rozkładu krzywizny i to właśnie krzywizna powinna być podstawą identyfikacji krzywych przejściowych. W ogólnym ujęciu może być ona liniowa lub nieliniowa. Dla nieliniowej zmiany krzywizny wydaje się adekwatne stosowane m. in. przez R. J. Grabowskiego [5] określenie „gładkie krzywe przejściowe”, korespondujące z kluczowym znaczeniem klasy funkcji opisującej

krzywiznę. Oczywiście rozkład krzywizny należy formować dla zmiennej  $l$ , określającej położenie danego punktu na długości krzywej. Większość krzywych przejściowych łączy ze sobą wspólny algorytm wyznaczania krzywizny za pomocą równań różniczkowych [10-12, 19].

Podstawową wadę krzywej przejściowej w postaci klotoidy (o krzywiznie liniowej) stanowią załomy na wykresie jej krzywizny, występujące w rejonach początkowym i końcowym. Są one przyczyną niekorzystnych oddziaływań dynamicznych w układzie tor – pojazd szynowy. Dlatego też na kolei od wielu lat promuje się stosowanie – z różnym zresztą skutkiem

– krzywych przejściowych posiadających nieliniowy rozkład krzywizny na długości.

## Praktyczne uwarunkowania dotyczące stosowania gładkich krzywych przejściowych

Przeprowadzone analizy teoretyczne oraz badania eksperymentalne (m. in. [11, 13, 16-17]) jednoznacznie wskazują na mniejsze (a więc korzystniejsze) oddziaływania dynamiczne podczas przejazdu pociągu po gładkich krzywych przejściowych. Jednak pomimo swoich bezspornych zalet zakres stosowania tych krzywych w eksploatowanych torach kolejowych jest w znacznym stopniu ograniczony. Jak się wydaje, podstawową przyczyną panującego w tej kwestii sceptycyzmu są bardzo małe wartości rzędnych poziomych (i rzędnych rampy przechyłkowej) w rejonie początkowym omawianych krzywych. Uniemożliwia to często ich poprawne wytyczenie w terenie i w praktyce prowadzi do skrócenia wykonanej krzywej przejściowej (czyli wydłużenia przylegającej prostej) w stosunku do założeń projektowych.

Przedstawione uwarunkowania powodują, że w dalszym ciągu najbardziej rozpowszechnioną postacią krzywej przejściowej jest kłotoida, o liniowym przebiegu krzywizny (i ewentualnie prostoliniową rampą przechyłkową). Stosowanie paraboli trzeciego stopnia, stanowiącej uproszczenie kłotoidy, przy obecnych możliwościach obliczeniowych nie ma już bowiem uzasadnienia.

W pracy [12] została przedstawiona analiza znanych postaci krzywych przejściowych: kłotoidy, paraboli

czwartego stopnia, krzywej Blossa, cosinusoidy i sinusoidy. Dokonano identyfikacji krzywizny  $k(l)$  dla poszczególnych krzywych za pomocą równań różniczkowych oraz wyznaczono równania parametryczne  $x(l)$  i  $y(l)$ . Przedstawiono również rozwiązania przybliżone [1], występujące w licznych przepisach do dnia dzisiejszego.

W pracy [12] wykazano również, że przekroczenie wartości parametrów kinematycznych – przyrostu przyspieszenia  $\psi$  i prędkości podnoszenia koła taboru na rampie przechyłkowej  $f$  – występujących na kłotoidzie obejmuje co najmniej połowę długości każdej gładkiej krzywej przejściowej, a wartość tego przekroczenia jest znaczna. Dlatego też wydaje się właściwe utrzymanie dla wszystkich rodzajów krzywych jednakowych wartości dopuszczalnych  $\psi_{dop}$  i  $f_{dop}$ , co prowadzi do konieczności wydłużenia poszczególnych gładkich krzywych przejściowych w stosunku do kłotoidy (poprzez wprowadzenie odpowiedniego współczynnika  $A$ ). Staje się wówczas możliwe wzajemne porównanie rzędnych poziomych i rzędnych rampy przechyłkowej.

Niniejsze opracowanie przedstawia próbę znalezienia nowej postaci krzywej przejściowej, dostosowanej do przedstawionych wyżej uwarunkowań. Jego rozszerzoną i w sposób istotny zmodyfikowaną wersję stanowi praca [14], przyjęta do druku w Journal of Surveying Engineering ASCE.

## Wyznaczenie nowej postaci krzywej przejściowej

Z ogólnej metody identyfikacji krzywizny  $k(l)$  na krzywych przejściowych [10] wynika, że dla promienia  $R$  łuku

kołowego oraz długości  $l_k$  krzywej przejściowej przyjęte założenia wyznaczają następujące warunki brzegowe:

$$\begin{cases} k(0) = 0 & k(l_k) = \frac{1}{R} \\ k'(0) = -\frac{C}{Rl_k} & k'(l_k) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

oraz równanie różniczkowe

$$k^{(4)}(l) = 0 \quad (2)$$

przy czym współczynnik liczbowy  $C \geq 0$ . W wyniku rozwiązania problemu różniczkowego (1), (2) otrzymujemy

$$k(l) = \frac{C}{Rl_k} l - \frac{2C-3}{Rl_k^2} l^2 + \frac{C-2}{Rl_k^3} l^3 \quad (3)$$

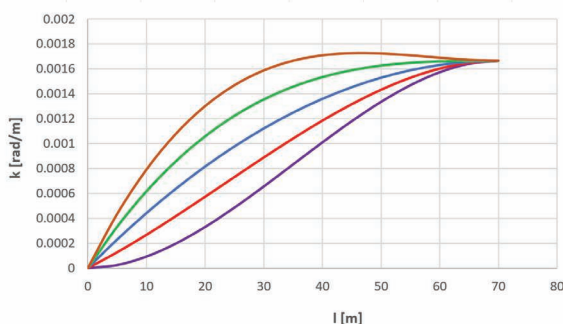
a funkcja kąta nachylenia stycznej  $\Theta(l)$  jest opisana zależnością

$$\Theta(l) = \frac{C}{2Rl_k} l^2 - \frac{2C-3}{3Rl_k^2} l^3 + \frac{C-2}{4Rl_k^3} l^4 \quad (4)$$

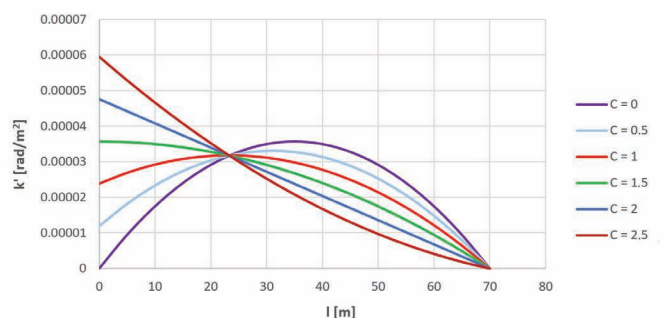
Na końcu krzywej przejściowej  $\Theta(l_k) = (6+C)l_k/12R$ .

Na rysunku 1 pokazano przykładowe wykresy krzywizny na długości dla wybranych wartości współczynnika  $C$ . Jak widać, monotoniczny przebieg krzywizny cechują krzywe dla  $C \in \langle 0;3 \rangle$ . Krzywa dla  $C = 0$  posiada najbardziej łagodny przebieg, jednak – podobnie jak w przypadku pozostałych krzywych – spełnienie warunku zachowania dopuszczalnej wartości przyrostu przyspieszenia wymaga jej wydłużenia w stosunku do odpowiadającej krzywej o krzywiznie liniowej.

Dokonując wyboru najkorzystniejszej spośród rozpatrywanych krzywych, należy jednak w pierwszym rzędzie kierować się kryterium najmniejszej wymaganej długości. Długość tę wyznacza – oprócz prędkości jazdy pociągów – dopuszczalna war-



1. Przykładowe wykresy krzywizny na długości nowej krzywej przejściowej dla wybranych wartości współczynnika  $C$  ( $R = 600$  m,  $l_k = 70$  m)



2. Przykładowe wykresy pochodnej krzywizny na długości nowej krzywej przejściowej dla wybranych wartości współczynnika  $C$  ( $R = 600$  m,  $l_k = 70$  m)

Tab. 1. Wartości stosunku  $\max k'(l) / k'(l)_{\text{lin}}$  dla wybranych współczynników  $C$

$C$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$\max k'(l) / k'(l)_{\text{lin}}$	3/2	25/18	4/3	3/2	2	5/2	3	7/2	4

tość przyrostu przyspieszenia, która jest bezpośrednio związana z pochodną krzywizny:

$$k'(l) = \frac{C}{Rl_k} - \frac{2(2C-3)}{Rl_k^2}l + \frac{3(C-2)}{Rl_k^3}l^2 \quad (5)$$

Rysunek 2 przedstawia wykresy pochodnej krzywizny na długości krzywej przejściowej, dla których  $C \in <0;2,5>$ .

Pochodna  $k'(l)$  opisana równaniem (5) zmienia się na długości, zatem miarodajna staje się tutaj jej wartość maksymalna. Dla współczynnika  $C \in <0;1,5>$  wartość  $\max k'(l) = k'(l_0)$ , przy czym położenie  $l_0$  punktu, w którym występuje maksimum funkcji  $k'(l)$ , wyznacza się z warunku

$$k''(l) = -\frac{2(2C-3)}{Rl_k^2} + \frac{6(C-2)}{Rl_k^3}l_0 = 0$$

z którego wynika, że

$$l_0 = \frac{2C-3}{3(C-2)}l_k \quad (6)$$

Określona wzorem (6) wartość  $l_0$  podstawiona do równania (5) wyznacza maksimum funkcji  $k'(l)$ .

$$\max k'(l) = \left[ C - \frac{(2C-3)^2}{3(C-2)} \right] \frac{1}{Rl_k} \quad (7)$$

Dla  $C > 1,5$  wyznaczona za pomocą wzoru (7) wartość  $l_0$  nie spełnia warunków zadania (otrzymuje się  $l_0 > l_k$  lub wyznaczone  $l_0$  odnosi się do minimum funkcji). Ponieważ jednak  $k'(l)$  przyjmuje tutaj największą wartość w punkcie początkowym, zatem wartość  $\max k'(l) = k'(0)$ .

Stopień niezbędnego wydłużenia szukanej krzywej przejściowej względem odpowiadającej bazowej kłotoidy, związany z koniecznością zachowania dopuszczalnej wartości przyrostu przyspieszenia, określa stosunek wartości  $\max k'(l)$  do pochodnej  $k'(l)_{\text{lin}}$  występującej na krzywiznie liniowej, która jest wartością stałą opisaną wzorem

$$k'(l)_{\text{lin}} = \frac{1}{Rl_k} \quad (8)$$

W tabeli 1 zestawiono wartości sto-

sunku  $\max k'(l) / k'(l)_{\text{lin}}$  dla wybranych  $C \in <0;4>$ . Z przeprowadzonej analizy wynika, że dla  $C = 0$  wartość  $k'(l) = 3/2Rl_k$ , zatem z uwagi na dopuszczalną wartość przyrostu przyspieszenia długość krzywej przejściowej musi być o 50% większa niż dla krzywizny liniowej. Jak się okazuje, z omawianego punktu widzenia najkorzystniejsze rozwiązanie stanowi przyjęcie współczynnika  $C = 1$ . Dla tego przypadku obowiązuje bowiem  $\max k'(l) = 4/3Rl_k$ , co oznacza, że długość odpowiadającej krzywej musi być większa od długości kłotoidy tylko o 1/3. Przyjęcie  $C = 1$  prowadzi to do następujących równań funkcji  $k(l)$  i  $\Theta(l)$ :

$$k(l) = \frac{1}{Rl_k}l + \frac{1}{Rl_k^2}l^2 - \frac{1}{Rl_k^3}l^3 \quad (9)$$

$$\Theta(l) = \frac{1}{2Rl_k}l^2 + \frac{1}{3Rl_k^2}l^3 - \frac{1}{4Rl_k^3}l^4 \quad (10)$$

Na końcu krzywej przejściowej kąt nachylenia stycznej  $\Theta(l_k) = 7l_k/12R$ .

Równania współrzędnych szukanej krzywej przejściowej możemy zapisać w postaci parametrycznej [10]:

$$x(l) = \int \cos \Theta(l) dl \quad (11)$$

$$y(l) = \int \sin \Theta(l) dl \quad (12)$$

Do rozwinięcia funkcji  $\cos \Theta(l)$  i  $\sin \Theta(l)$  w szereg Maclaurina wykorzystano program Maxima [18], a następnie scałkowano poszczególne wyrazy, otrzymując równania parametryczne:

$$x(l) = l - \frac{1}{40R^2l_k^2}l^5 - \frac{1}{36R^2l_k^3}l^6 + \frac{5}{504R^2l_k^4}l^7 + \frac{1}{96R^2l_k^5}l^8 + \left( \frac{1}{3456R^4l_k^4} - \frac{3}{864R^2l_k^6} \right) l^9 \quad (13)$$

$$y(l) = \frac{1}{6Rl_k}l^3 + \frac{1}{12Rl_k^2}l^4 - \frac{1}{20Rl_k^3}l^5 - \frac{1}{336R^3l_k^3}l^7 - \frac{1}{192R^3l_k^4}l^8 + \frac{1}{2592R^3l_k^5}l^9 \quad (14)$$

Uzyskaną nową postać krzywej przejściowej będziemy określać mianem „wygładzonej krzywej przejściowej”.

## Analiza porównawcza wybranych krzywych przejściowych

W celu określenia miejsca wyznaczonej nowej postaci krzywej przejściowej pośród innych rozwiązań przeprowadzono odpowiednią analizę porównawczą. Jako odniesienie przyjęto krzywe przejściowe w postaci kłotoidy (z krzywizną liniową) oraz w postaci krzywej Blossa (z krzywizną nieliniową).

Krzywizna krzywej przejściowej w postaci kłotoidy jest opisana równaniem [12]

$$k(l) = \frac{1}{Rl_k}l \quad (15)$$

Jej współrzędne kartezjańskie mają postać równań parametrycznych:

$$x(l) = l - \frac{1}{40R^2l_k^2}l^5 + \frac{1}{3456R^4l_k^4}l^9 - \frac{1}{599040R^6l_k^6}l^{13} \quad (16)$$

$$y(l) = \frac{1}{6Rl_k}l^3 - \frac{1}{336R^3l_k^3}l^7 + \frac{1}{42240R^5l_k^5}l^{11} \quad (17)$$

Krzywa Blossa posiada krzywiznę opisaną równaniem [12]

$$k(l) = \frac{3}{Rl_k^2}l^2 - \frac{2}{Rl_k^3}l^3 \quad (18)$$

oraz równania parametryczne:

$$x(l) = l - \frac{1}{14R^2l_k^4}l^7 + \frac{1}{16R^2l_k^5}l^8 - \frac{1}{72R^2l_k^6}l^9 \quad (19)$$

$$y(l) = \frac{1}{4Rl_k^2}l^4 - \frac{1}{10Rl_k^3}l^5 - \frac{1}{60R^3l_k^6}l^{10} + \frac{1}{44R^3l_k^7}l^{11} \quad (20)$$

Do przeprowadzenia analizy porównawczej niezbędne staje się przyjęcie wartości parametrów geometrycznych, tj. promienia łuku kołowego oraz długości krzywej przejściowej, które wyznacza się dla założonej prędkości jazdy pociągów. Są one limitowane dopuszczalnymi wartościami odpowiednich parametrów kinematycznych.

Minimalny promień łuku kołowego  $R$  [m] oblicza się za pomocą wzoru

$$R_{\text{min}} = \frac{V^2}{3.6^2 \left( g \frac{h_0}{s} + a_{\text{dop}} \right)} \quad (21)$$

gdzie:  $V$  – prędkość jazdy pociągów

**Tab. 2.** Wybrane wartości rzędnych poziomych  $y$  [mm] w rejonie początkowym

Krzywa przejściowa	$l=1\text{ m}$	$l=2\text{ m}$	$l=3\text{ m}$	$l=4\text{ m}$	$l=5\text{ m}$	$l=10\text{ m}$
Klotoida	0,00361	0,0289	0,0974	0,231	0,451	3,608
Krzywa Blossa	0,00003	0,0005	0,0025	0,008	0,019	0,299
Wyglądzona krzywa przejściowa	0,00271	0,0218	0,0739	0,176	0,345	2,820

w km/h,  $a_{\text{dop}}$  – dopuszczalna wartość nie zrównoważonego przyspieszenia w  $\text{m/s}^2$ ,  $h_0$  – wartość przechyłki na łuku w mm,  $g$  – przyspieszenie ziemskie ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ),  $s$  – rozstaw toków szynowych ( $s = 1500 \text{ mm}$ ).

Długość krzywej przejściowej określają warunki zachowania dopuszczalnych wartości prędkości zmiany przyspieszenia  $\psi$  i prędkości podnoszenia koła taboru na rampie przechyłkowej  $f$ . W ogólnym przypadku (tj. za wyjątkiem klotoidy) parametry te są zmienne na długości, zatem jako miarodajne należy przyjąć ich wartości maksymalne.

Jeżeli uwzględni się związek występujący pomiędzy rzędnymi rampy przechyłkowej  $h(l)$  i krzywizną  $k(l)$

$$h(l) = h_0 R k(l) \quad (22)$$

otrzymuje się dwa następujące warunki:

$$\psi_{\text{max}} = \frac{V}{3.6} \left[ \left( \frac{V}{3.6} \right)^2 - \frac{g}{s} h_0 R \right] \max k'(l) \leq \psi_{\text{dop}}$$

$$f_{\text{max}} = \frac{V}{3.6} h_0 R \max k'(l) \leq f_{\text{dop}}$$

Jak się okazuje, wartość  $\max k'(l)$  dla rozpatrywanych krzywych przejściowych można wyznaczyć z uniwersalnego wzoru

$$\max k'(l) = \frac{A}{R l_k}$$

przy czym wartości współczynnika  $A$  wynoszą:

- dla klotoidy  $A = 1$ ,
- dla krzywej Blossa  $A = 3/2$ ,
- dla nowej krzywej przejściowej

$A = 4/3$  (tab. 1).

Na tej podstawie można wyznaczyć następujące wzory na minimalną długość porównywanych krzywych przejściowych ze względu na parametry  $\psi$  i  $f$ :

$$\min l_k^\psi = \frac{V}{3.6} \left[ \left( \frac{V}{3.6} \right)^2 \frac{1}{R} - \frac{g}{s} h_0 \right] \frac{A}{\psi_{\text{dop}}} \quad (23)$$

$$\min l_k^f = \frac{V}{3.6} h_0 \frac{A}{f_{\text{dop}}} \quad (24)$$

Zakładamy prowadzenie analizy dla prędkości jazdy pociągów  $V = 100 \text{ km/h}$ . Przyjmując wartość przechyłki na łuku kołowym  $h_0 = 70 \text{ mm}$  oraz dopuszczalną wartość przyspieszenia nie zrównoważonego  $a_{\text{dop}} = 0,85 \text{ m/s}^2$ , na podstawie warunku (21) otrzymujemy wartość  $R_{\text{min}} = 590,002 \text{ m}$ . W przeprowadzonych dalej obliczeniach przyjmujemy promień łuku kołowego  $R = 600 \text{ m}$ .

Zakładając dopuszczalną wartość prędkości zmiany przyspieszenia  $\psi_{\text{dop}} = 0,3 \text{ m/s}^3$  (jak dla pojedynczych krzywych przejściowych o krzywiznie liniowej), na podstawie warunków (23) i (24) określamy minimalne długości odpowiedniej krzywej przejściowej i ostatecznie przyjmujemy:

- dla klotoidy  $l_k = 77 \text{ m}$ ,
- dla krzywej Blossa  $l_k = 116 \text{ m}$ ,
- dla nowej krzywej przejściowej  $l_k = 103 \text{ m}$ .

Na rysunku 3 przedstawiono wykresy krzywizny na długości porównywanych krzywych przejściowych, sporządzone na podstawie wzorów (9), (15) i (18). Na rysunku 4 pokazano odpowiednie wykresy rzędnych poziomych na podstawie wzorów (13), (14), (16),

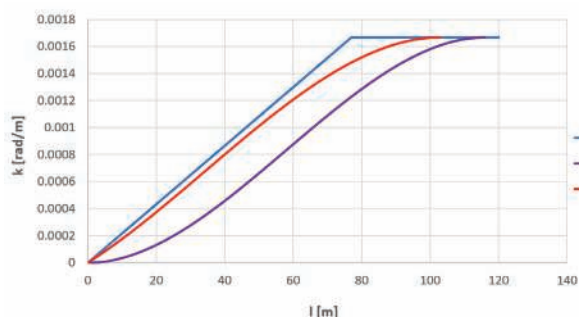
(17), (19) i (20). Z kolei rysunek 5 zawiera wykresy rzędnych rampy przechyłkowej wyznaczonych za pomocą wzoru (22).

Jak wynika z rysunku 3, wykres krzywizny dla wyznaczonej nowej krzywej przejściowej znacząco odbiega od wykresu krzywizny dla krzywej Blossa. Dotyczy to zwłaszcza strefy początkowej, w której różnica ta się kształtuje i sprawia, że omawiane krzywe tak bardzo od siebie odbiegają. Natomiast przebieg wykresu krzywizny dla nowej krzywej jest na znacznej długości zbliżony (choć nieco korzystniejszy) do wykresu krzywizny dla klotoidy. Dopiero w rejonie końcowym, przy przejściu z krzywej przejściowej na łuk kołowy, uwidacznia się znaczna różnica: wykres krzywizny dla nowej krzywej jest tam dużo łagodniejszy. Przedstawione uwagi odnoszą się również w pełni do wykresów rzędnych rampy przechyłkowej na rysunku 5.

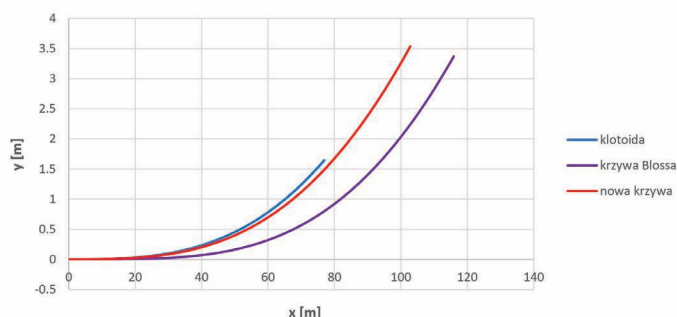
Należy zauważyć, że wyznaczona krzywa przejściowa nie zapewnia płynnego przejścia z prostej na krzywą przejściową, zatem nie można jej zakwalifikować do kategorii klasycznych gładkich krzywych przejściowych. Ponieważ jednak jest ona od tych krzywych krótsza i powstała z myślą o spełnieniu wymagań wykonawczych, nie ulega wątpliwości jej większa praktyczna przydatność. Potwierdzić to może szczegółowa analiza rzędnych poziomych i rzędnych rampy przechyłkowej w rejonie początkowym.

## Analiza rzędnych poziomych i rzędnych rampy przechyłkowej w rejonie początkowym

Popatrzmy zatem, jak kształtują się rzędne poziome porównywanych krzywych przejściowych oraz rzędne rampy przechyłkowej na odcinku pierwszych 10 metrów. Na rysunku 6



3. Wykresy krzywizny na długości porównywanych krzywych przejściowych ( $R = 600 \text{ m}$ )



4. Wykresy rzędnych poziomych na długości porównywanych krzywych przejściowych (w skali skażonej)



pokazano wykresy rzędnych poziomych w rejonie początkowym. Odpowiednie wartości liczbowe zawiera tabela 2.

W celu jeszcze lepszego zobrazowania różnicy występującej pomiędzy wygładzoną krzywą przejściową i krzywą Blossa wyznaczono procentowe wartości stosunku rzędnych wymienionych krzywych do rzędnych klotoidy. Zostały one przedstawione na rysunku 7. Jak widać, rzędne krzywej Blossa w rejonie początkowym wynoszą od 1 do 8% rzędnych klotoidy, podczas gdy dla nowej krzywej przejściowej odpowiedni stosunek wynosi od 75 do 78%. Nie ulega zatem wątpliwości, że w przypadku początkowego rejonu krzywej Blossa praktyczna realizacja tak małych rzędnych jest absolutnie niemożliwa. Natomiast możliwości realizacyjne w tej strefie nowej krzywej przejściowej nie różnią się zbyt od analogicznych możliwości w odniesieniu do klotoidy.

Podobną analizę należy jeszcze przeprowadzić dla rzędnych rampy przechyłkowej. Na rysunku 8 pokazano wykresy rzędnych rampy w rejonie początkowym. Odpowiednie wartości liczbowe zawiera tabela 3.

Wykresy na rysunku 8 i wartości rzędnych rampy przechyłkowej w tabeli 3 w pełni potwierdzają wnioski z analizy rzędnych poziomych. Praktyczna realizacja i następnie utrzymanie bardzo małych wartości rzędnych

**Tab. 3.** Wybrane wartości rzędnych rampy przechyłkowej  $h$  [mm] w rejonie początkowym

Krzywa przejściowa	$l = 1$ m	$l = 2$ m	$l = 3$ m	$l = 4$ m	$l = 5$ m	$l = 10$ m
Klotoida	0,909	1,818	2,727	3,636	4,545	9,091
Krzywa Blossa	0,016	0,062	0,138	0,244	0,379	1,471
Wygładzona krzywa przejściowa	0,686	1,385	2,096	2,820	3,555	7,392

rampy przechyłkowej w rejonie początkowym krzywej Blossa nie wydają się możliwe. Natomiast podobnie jak w przypadku rzędnych poziomych, możliwości realizacyjne w strefie początkowej rampy przechyłkowej na nowej krzywej przejściowej są analogiczne jak dla rampy prostoliniowej występującej na klotoidzie.

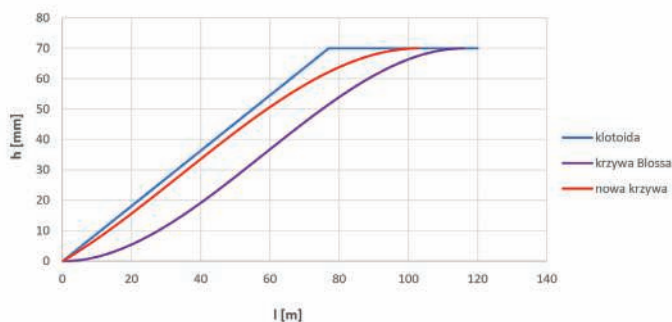
Sformułowane dla krzywej Blossa uwagi, dotyczące możliwości praktycznej realizacji i utrzymania rzędnych krzywej przejściowej i rzędnych rampy przechyłkowej w rejonie początkowym, odnoszą się do całej rodziny gładkich krzywych przejściowych. Podważają one w dużym stopniu celowość stosowania tych krzywych na liniach kolejowych i jednocześnie wyjaśniają sceptycyzm, jaki otacza te krzywe w niektórych środowiskach praktyki wykonawczej.

## Wnioski

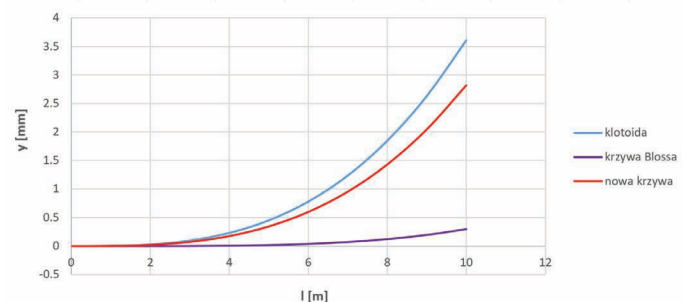
Gładkie krzywe przejściowe, tj. krzywe o nieliniowym rozkładzie krzywizny na długości, są znane od dawna i posiadają szereg bezspornych zalet – przede wszystkim cechują je mniejsze wartości oddziaływań dynamicznych

niż ma to miejsce dla klotoidy (o liniowym rozkładzie krzywizny). Zakres ich stosowania na drogach kolejowych jest jednak – jak dotąd – bardzo ograniczony. Krzywe te, niestety, mają jedną, zasadniczą wadę – bardzo małe wartości rzędnych poziomych (i rzędnych rampy przechyłkowej) w rejonie początkowym, w praktyce często niemożliwe do realizacji i następnie utrzymania.

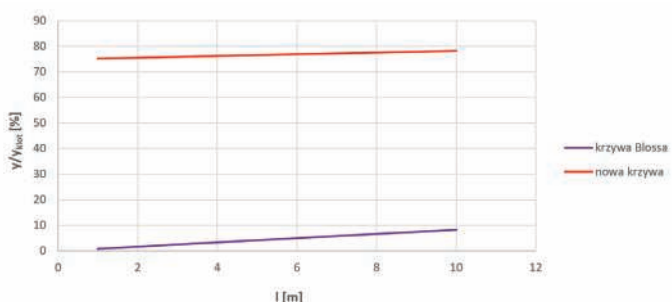
Podstawową przyczynę trudności występujących w znanych postaciach gładkich krzywych przejściowych stanowi nadmierne wyłagodzenie krzywizny w ich rejonie początkowym. Należy zatem znaleźć nową postać krzywej przejściowej, rezygnując z warunku zerowania się pochodnej krzywizny w punkcie początkowym. Wykorzystując metodę identyfikacji krzywizny za pomocą równań różniczkowych [12], uzyskano taką właśnie postać krzywej, którą określono mianem "wygładzonej krzywej przejściowej". Wyznaczona nowa krzywa przejściowa charakteryzuje się łagodnym przebiegiem krzywizny w rejonie wejścia w łuk kołowy oraz jej pewnym zaburzeniem w rejonie początkowym (mniejszym jednak niż w przypadku



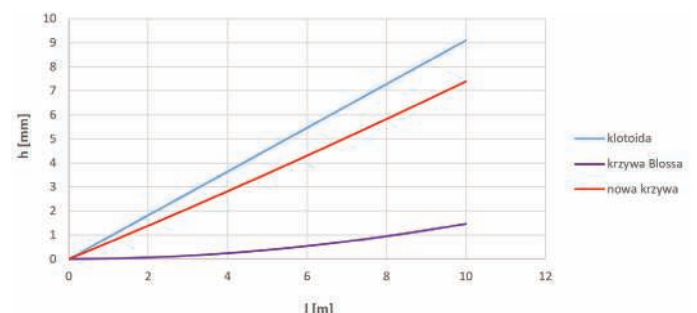
5. Wykresy rzędnych rampy przechyłkowej na długości porównywanych krzywych przejściowych ( $h_0 = 70$  mm)



6. Kształtowanie się rzędnych poziomych rozpatrywanych krzywych przejściowych w rejonie początkowym (w skali skażonej)



7. Procentowe wartości stosunku rzędnych poziomych krzywej Blossa i wygładzonej krzywej przejściowej do rzędnych klotoidy w rejonie początkowym



8. Kształtowanie się rzędnych rampy przechyłkowej w rejonie początkowym na rozpatrywanych krzywych przejściowych

klotoidy). Wykazano jej zdecydowaną przewagę nad reprezentującą gładkie krzywe przejściowe krzywą Blossa. Praktyczna realizacja (i następnie utrzymanie) rejonu początkowego tej krzywej – z uwagi na bardzo małe wartości rzędnych poziomych i rzędnych rampy przechyłkowej – okazuje się zupełnie nieefektywna. Natomiast możliwości realizacyjne w tej strefie nowej krzywej przejściowej nie różnią się zbyt od analogicznych możliwości w odniesieniu do klotoidy.

Tak więc, jak się wydaje, zaprezentowana nowa krzywa mogłaby z powodzeniem konkurować z powszechnie obecnie stosowaną klotoidą, do której jest podobna w rejonie początkowym, natomiast różni się istotnie na dalszej długości, a zwłaszcza w rejonie końcowym, gdzie zapewnia łagodne wejście z krzywej przejściowej w łuk kołowy. Jest to o tyle istotne, że inne możliwości poprawy istniejącej sytuacji są w znacznym stopniu ograniczone. Wykazany brak możliwości praktycznej realizacji i utrzymania rzędnych krzywej przejściowej i rzędnych rampy przechyłkowej w rejonie początkowym podważa bowiem w dużym stopniu celowość stosowania klasycznych gładkich krzywych przejściowych na liniach kolejowych.

Należy zauważyć, że wśród innych znanych postaci krzywych przejściowych również mogą występować rozwiązania (lub warianty rozwiązań) spełniające wymagania realizacyjne i utrzymaniowe dróg kolejowych, jednak ich odpowiednie właściwości odnoszące się do wartości rzędnych poziomych w rejonie początkowym (i rzędnych rampy przechyłkowej) nie były dotąd eksponowane. Jak wynika z ogólnego rozeznania, znaczny stopień podobieństwa do zaproponowanej w niniejszej pracy nowej krzywej przejściowej cechuje jeden z wariantów tzw. wielomianowych krzywych przejściowych [7] oraz klotoid dwuparametrowych [9]. ◀

## Materiały źródłowe

- [1] Bałuch H.: Optymalizacja układów geometrycznych toru. WKiŁ, Warszawa 1983.  
 [2] Baykal O., Tari E., Coskun Z., Sahin M.: New transition curve joining

- two straight lines. *Journal of Transportation Engineering* 1997, Vol. 123, No. 5, pp. 337-345.  
 [3] Bosurgi G., D'Andrea A.: A polynomial parametric curve (PPC-CURVE) for the design of horizontal geometry of highways. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering* 2012, Vol. 27, No. 4, pp. 303-312.  
 [4] Cai H., Wang G. (2009). A new method in highway route design: joining circular arcs by a single C-Bezier curve with shape parameter." *Journal of Zhejiang University* 2009, SCIENCE A, Vol. 10, No. 4, pp. 562-569.  
 [5] Grabowski R. J.: Kształtowanie geometryczne krzywych przejściowych w drogach kołowych, kolejowych i trasach wodnych. *Politechnika Białostocka, Rozprawy Naukowe* Nr 38, 1996.  
 [6] Habib Z., Sakai M.: On PH quantic spirals joining two circles with one circle inside the other. *Computer-Aided Design* 2007, Vol. 39, pp. 125-132.  
 [7] Kobryń, A.: Polynomial solutions of transition curves. *Journal of Surveying Engineering* 2011, Vol. 137, No. 3, pp. 71-80.  
 [8] Kobryń A.: Universal solutions of transition curves. *Journal of Surveying Engineering* 2016, Vol. 142, No. 4, Article ID 04016010.  
 [9] Kobryń A.: *Transition Curves for Highway Geometric Design*. Springer International Publishing, Series: Springer Tracts on Transportation and Traffic, Vol. 14, 2017.  
 [10] Koc W.: Analytical method of modelling the geometric system of communication route. *Mathematical Problems in Engineering* 2014, Vol. 2014, Article ID 679817.  
 [11] Koc W.: *Elementy teorii projektowania układów torowych*. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2004.  
 [12] Koc W.: Identification of transition curves in vehicular roads and railways. *Logistics and Transport* 2015, Vol. 28, No. 4, pp. 31-42.  
 [13] Koc W.: Krzywe przejściowe z nieliniowymi rampami przechyłkowymi w warunkach eksploatacyjnych PKP. *Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej* 1991, Nr 462, s. 3-129.  
 [14] Koc W.: New transition curve adapted to operational requirements

- of railways. Artykuł przyjęty do druku w *Journal of Surveying Engineering ASCE*.  
 [15] Koc W.: Transition curve with smoothed curvature at its ends for railway roads. *Current Journal of Applied Science and Technology* 2017, Vol. 22, Issue 3, Article No. CJAST.35006, pp. 1-10.  
 [16] Koc W., Mieloszyk E.: Analiza porównawcza wybranych krzywych przejściowych z wykorzystaniem modelu dynamicznego. *Archiwum Inżynierii Lądowej* 1987, Vol. 33, Nr 2, s. 239-261.  
 [17] Koc W., Mieloszyk E.: Analysis of dynamic measurements on transition curves. *Archives of Civil Engineering* 1992, Vol. 38, iss. 1-2, pp. 167-172.  
 [18] Maxima, a Computer Algebra System, <http://maksima.sourceforge.net>  
 [19] Mieloszyk E., Koc W.: General dynamic method for determining transition curve equations. *Rail International – Schienen der Welt* 1991, Vol. 22, No. 10, pp. 32-40.  
 [20] Sanchez-Reyes J., Chacon J. M.: Nonparametric Bezier representation of polynomial transition curves. *Journal of Surveying Engineering* 2018, 144(2), 10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000251, 04018001.  
 [21] Tari E., Baykal O.: A new transition curve with enhanced properties. *Canadian Journal of Civil Engineering* 2011, Vol. 32, No. 5, pp. 913-923.  
 [22] Tasci L., Kuloglu N.: Investigation of a new transition curve. *The Baltic Journal of Road and Bridge Engineering* 2011, Vol. 6, No. 1, pp. 23-29.  
 [23] Zboiński K., Woźnica P.: Optimization of polynomial transition curves from the viewpoint of jerk value. *Archives of Civil Engineering* 2017, Vol. 63, No. 1, pp. 181-199.  
 [24] Zboiński K., Woźnica P.: Combined use of dynamical simulation and optimisation to form railway transition curves. *Vehicle Systems Dynamics* 2018, pp. 1-57.  
 [25] Ziatdinov R.: Family of superspirals with completely monotonic curvature given in terms of Gauss hypergeometric function. *Computer Aided Geometric Design* 2012, Vol. 29, No. 7, pp. 510-518.