

# Praca podkładu kolejowego jako konstrukcji o zmiennym przekroju poprzecznym – zagadnienie ekwiwalentnego przekroju

## Work of a railway sleeper as a structure with variable cross-section - the issue of an equivalent cross-section



**Włodzimierz Czyczula**

Prof. dr hab. inż.

Politechnika Krakowska, Wydział Inżynierii Lądowej, Instytut Inżynierii Drogowej i Kolejowej, Katedra Infrastruktury Transportu Szybnego i Lotniczego

czyczula@pk.edu.pl



**Dorota Błaszkiwicz**

Mgr inż.

Politechnika Krakowska, Wydział Inżynierii Lądowej, Instytut Inżynierii Drogowej i Kolejowej, Katedra Infrastruktury Transportu Szybnego i Lotniczego

dorotablaszkiewicz@gmail.com



**Małgorzata Urbanek**

Mgr inż.

Politechnika Krakowska, Wydział Inżynierii Lądowej, Instytut Inżynierii Drogowej i Kolejowej, Katedra Infrastruktury Transportu Szybnego i Lotniczego

malgorzataurbanek@gmail.com

**Streszczenie:** W pracy przedstawiono analizę pracy podkładu jako konstrukcji o zmiennym przekroju oraz sposobu wyznaczenia ekwiwalentnego przekroju, stałego na długości, którego zastosowanie, dawałoby zbliżone kształt linii ugięcia i naprężeń zginających w odniesieniu do rzeczywistego, zmiennego przekroju poprzecznego. Przy wykorzystaniu modelu analitycznego oraz numerycznego określono przemieszczenia pionowe oraz naprężenia dla dwóch typów podkładu PS-94 i PS-08. Porównanie metod pozwala na wyznaczenie ekwiwalentnego momentu bezwładności do obliczeń analitycznych, zwłaszcza dynamicznych.

**Słowa kluczowe:** Nawierzchnia kolejowa; Moment bezwładności podkładu; Model analityczny; Model numeryczny

**Abstract:** The article presents an analysis of the work of a sleeper as a construction with variable section, and of the method of determining an equivalent section, constant throughout the length, the utilisation of which would have similar shapes of deflection and bending stress lines in relation to the real, variable cross section. Using an analytical and a numerical model, vertical displacements and stresses for two types of sleepers – PS-94 and PS-08 – were determined. The comparison of the methods allows for calculating an equivalent moment of inertia for analytical calculations, specifically the dynamic ones.

**Keywords:** Railway surface; Moment of inertia of sleeper; Analytical model; Numerical model

W analizie modeli dynamicznych nawierzchni kolejowej zazwyczaj podkłady traktowane są jako bryły sztywne (por. [5]). Prace [2,4] stanowią nieliczne przykłady analizy zmiennego przekroju podkładu, ograniczając się do analizy statycznej. W pracy [1] zaproponowano, by – w przypadku belek o dwóch wyraźnie rozróżniających się przekrojach poprzecznych – zastosować średnią harmoniczną. W analitycznych modelach dynamicznych zastosowanie zmiennego przekroju poprzecznego podkładu znacznie utrudnia analizę.

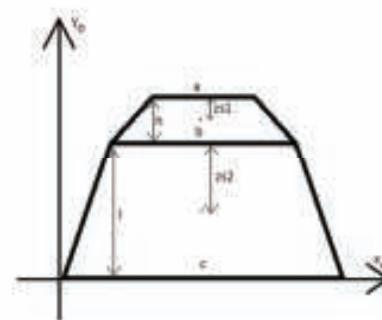
Dlatego w niniejszej pracy podjęto próbę wyznaczenia przekroju ekwiwalentnego, tzn. takiego przekroju o stałej wartości momentu bezwładności, którego zastosowanie dałoby zbliżone wartości odpowiedzi statycznej podkładu (zwłaszcza przemieszczeń) w odniesieniu do rzeczywistego, zmiennego przekroju poprzecznego.

Analizę ograniczono do dwóch typów podkładów: jednego z najbardziej popularnych na polskiej sieci kolejowej podkładu PS-94 oraz ciężkiego podkładu PS-08, również eksploatowanego na sieci PKP-PLK S.A.

### Opis modeli

### Narzędzie określania zastępczego momentu bezwładności podkładu kolejowego

Opracowanie modelu fizycznego podkładu kolejowego jest zadaniem bardzo złożonym. Wynika to z faktu, iż układ jaki tworzą poszczególne elementy podłoża rusztu torowego, tzn. podsypki i warstwy gruntu jest nieliniowy i niejednorodny. W pracy przyjęto stałą podatność podłoża podkładów, opisaną jednym parametrem sprężystym. Rzeczywisty przekrój poprzeczny podkładu zastąpiono dwo-

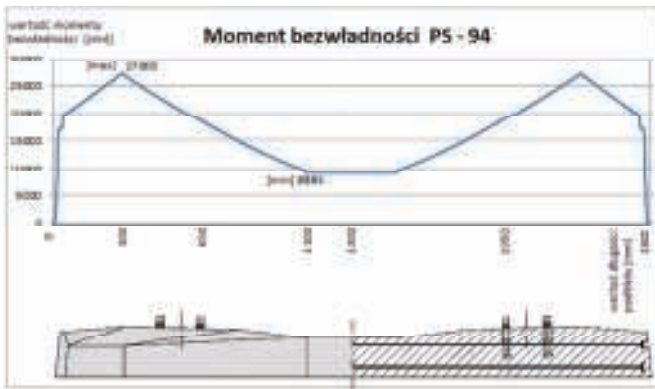


1. Model przekroju poprzecznego wykorzystywany do wyznaczenia zastępczych momentów bezwładności dla podkładu strunobetonowego. Źródło własne.

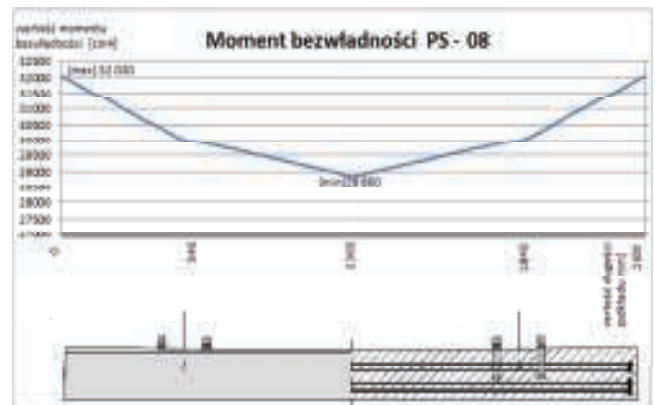
ma elementami trapezowymi.

Do obliczenia zastępczych momentów bezwładności dla różnych przekrojów podkładu strunobetonowego stworzono schemat, przedstawiony na rysunku 1.

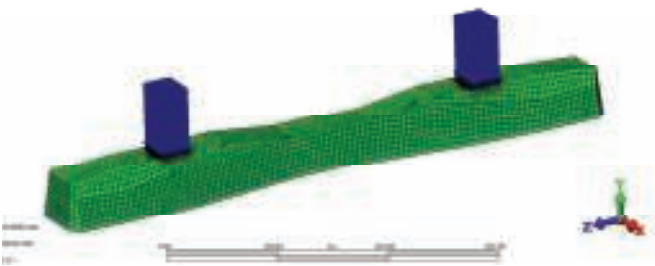
Zastępczy moment bezwładności wyliczano korzystając z twierdzenia Steinera, dzieląc przekrój poprzeczny na dwa trapezy. Przy wykorzystaniu tak stworzonego algorytmu wyzna-



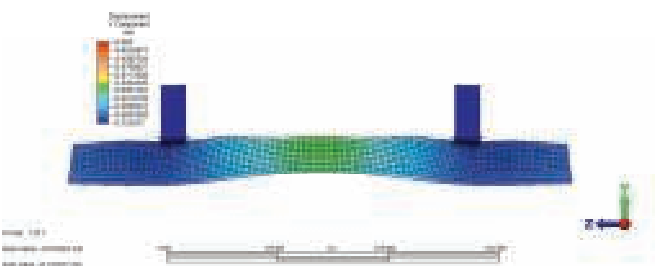
2. Wykres zastępczych momentów bezwładności podkładu PS-94



3. Wykres zastępczych momentów bezwładności podkładu PS-08



4. Model 3D podkładu PS-94 w Autodesk Simulation Multiphysics



5. Model 3D podkładu PS-94 z przeskalowanym obrazem ugięcia

zione kolejne wartości zastępczych momentów bezwładności. Analizie poddane zostały dwa podkłady tj. PS-94 oraz PS-08.

Wynikiem obliczeń są otrzymane poniższe wykresy zastępczych momentów bezwładności. Poszczególne wartości momentów bezwładności dla podkładu PS-94 przedstawione na rysunku 2.

Analizując powyższy wykres, można zaobserwować duże zróżnicowanie wartości momentu bezwładności na całej długości podkładu. Wartość maksymalna wynosi 27 000 cm<sup>4</sup>, a minimalna 8884 cm<sup>4</sup>. Wartość maksymalna nie jest usytuowana w miejscu przyłożenia obciążającej siły (pomiędzy kotwami podkładu). Wartość minimalna jest natomiast w miejscu najbardziej podatnym na pęknięcia, czyli w osi podkładu.

Na rysunku 3 przedstawiono wyniki obliczeń zastępczych momentów bezwładności dla podkładu PS-08.

Podkład PS-08 charakteryzuje się niewielkimi zmianami momentu bezwładności na długości, wartość maksymalna wynosi 32 030 cm<sup>4</sup>, a minimalna 28 860 cm<sup>4</sup>.

## Model analityczny

Do opisu modelu analitycznego przyjęto jednowarstwowy model nawierzchni w postaci belki Bernoulliego-Eulera. Obliczenia dla tego modelu wykonywano przy użyciu programu Mathcad: model obliczeniowy został opracowany w Katedrze Infrastruktury Transportu Szynowego i Lotniczego Politechniki Krakowskiej. W modelu ugięcia podkładu opisano poprzez równanie różniczkowe:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} - S \frac{d^2 y}{dx^2} + Uy = q(x) \quad (1)$$

w którym, parametry  $E$ ,  $S$ ,  $I_p$  oraz  $U$  są stałe na długości podkładu i oznaczają:

$E$  – moduł Younga materiału podkładu [N/m<sup>2</sup>]

$I_p$  – moment bezwładności podkładu [m<sup>4</sup>]

$S$  – siła sprężająca w podkładzie (- oznacza siłę rozciągającą) [N]

$U$  – współczynnik sztywności podparcia podkładu [N/m<sup>2</sup>]

$y$  – przemieszczenie pionowe podkładu [m]

$q(x)$  – jednostkowe obciążenie pionowe podkładu [N]

Podkład został obciążony układem sił rozłożonych na długości podkładek podszynowych w postaci rozkładu prostokątnego. Do wyznaczenia stałych, występujących w rozwiązaniu równania jednorodnego, przyjęto zerowanie się drugiej i trzeciej pochodnej na końcach podkładu, czyli zerowania momentu zginającego  $M$  i siły poprzecznej  $Q$  na końcach podkładu. Rozwiązanie równania niejednorodnego przyjęto stosując metodologię, opisaną w pracach [3,5], tzn. rozwijając linię ugięcia i obciążenie w szereg Fouriera w przedziale  $[0, \lambda]$ , gdzie  $\lambda$  oznacza długość podkładu:

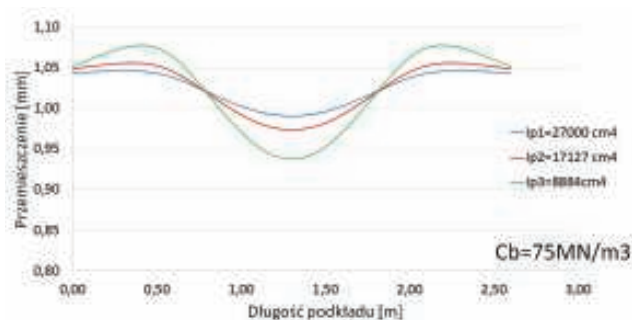
$$q(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cdot \cos \Omega_i x + b_i \cdot \sin \Omega_i x); \quad (2)$$

$$x \in [0, \lambda]; \Omega_i = \frac{2\pi \cdot i}{\lambda}$$

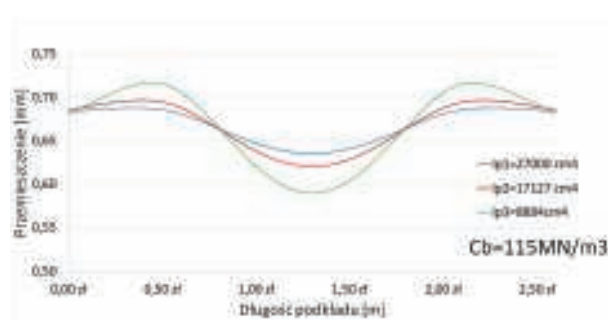
$$y(x) = \frac{y_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cdot \cos \Omega_i x + B_i \cdot \sin \Omega_i x); \quad (3)$$

$$x \in [0, \lambda]; \Omega_i = \frac{2\pi \cdot i}{\lambda}$$

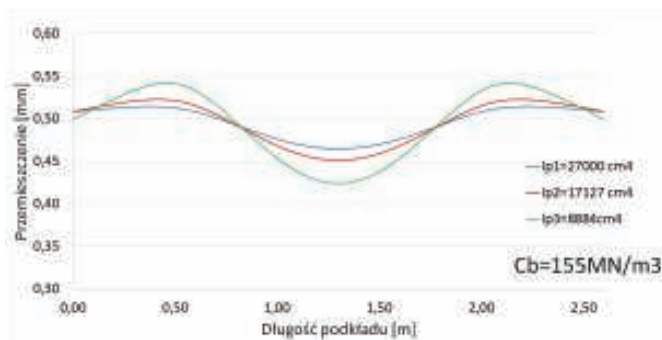
Stałe  $a_0$ ,  $a_i$  oraz  $b_i$  wyznaczono na podstawie rozwinięć znanego obciążenia w szereg Fouriera na podstawie wzorów analitycznych, natomiast stałe  $y_0$ ,  $A_i$  oraz  $B_i$  wyznaczono, po zróżniczkowaniu wyrażenia (3) i podstawieniu do równania (1) wyrażenia (2) i (3).



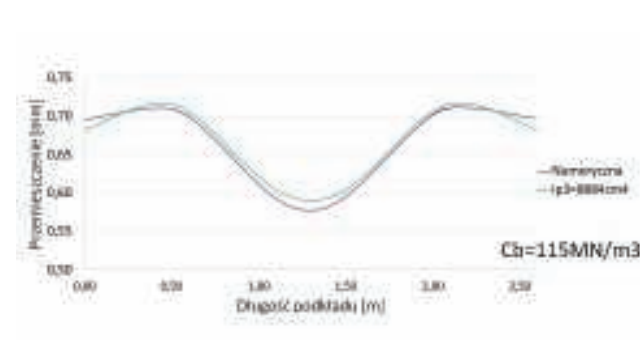
6. Linia ugięcia podkładu PS-94 dla maksymalnej średniej i minimalnej wartości momentu bezwładności i wskaźnika podłoża podkładu  $C_b = 75 \text{ MN/m}^3$



7. Linia ugięcia podkładu PS-94 dla maksymalnej średniej i minimalnej wartości momentu bezwładności i wskaźnika podłoża podkładu  $C_b = 115 \text{ MN/m}^3$



8. Linia ugięcia podkładu PS-94 dla maksymalnej średniej i minimalnej wartości momentu bezwładności i wskaźnika podłoża podkładu  $C_b = 155 \text{ MN/m}^3$



9. Porównanie linii ugięcia podkładu PS-94 dla metody numerycznej i analitycznej z uwzględnieniem momentu bezwładności  $I_p = 8884 \text{ cm}^4$ . Wartość współczynnika podłoża  $C_b = 115 \text{ MN/m}^3$

## Model numeryczny

W celu wykonania modelu numerycznego opartego na Metodzie Elementów Skończonych służącego do analizy stanu naprężeń i przemieszczeń stworzono trójwymiarowe bryły podkładów. Posłużył do tego program Autodesk Inventor, gdzie stworzono modele podkładów PS-94 oraz PS-08. Następnie w programie Autodesk Simulation Multiphysics, przeprowadzono analizę statyczną modeli. Opracowanej wcześniej bryle nadano właściwości materiałowe odpowiadające elementom występującym w torze. Podsypkę i podtorze zastąpiono elementami typu string o stosownej sztywności. Obciążenie od sił przenoszonych przez szyny zostały rozłożone na powierzchni odpowiadającej polu podkładki podszykowej.

Analiza statyczna modelu została przeprowadzona dla trzech różnych wartości wskaźników podłoża podkładu  $C_b$ .

## Analiza parametryczna

Przeprowadzono analizę parametryczną dla dwóch podkładów stru-

nobetonowych PS-94 oraz PS-08. Z wykorzystaniem modelu analitycznego a także numerycznego, porównano wartości ugięcia dla trzech wskaźników podłoża podkładu  $C_b$ : 75 MN/m<sup>3</sup>, 115 MN/m<sup>3</sup> oraz 155 MN/m<sup>3</sup>. W

modelu analitycznym wykorzystano do obliczeń trzy różne wartości momentu bezwładności podkładu (max, min i średnia).

Na rysunkach 6, 7 i 8 przedstawiono linię ugięcia podkładu PS-94 dla

Tab. 1. Porównanie wartości przemieszczeń podkładu PS-94 dla metody numerycznej i analitycznej z uwzględnieniem momentu bezwładności  $I_p$ . Wartość współczynnika podłoża  $C_b = 75 \text{ MN/m}^3$

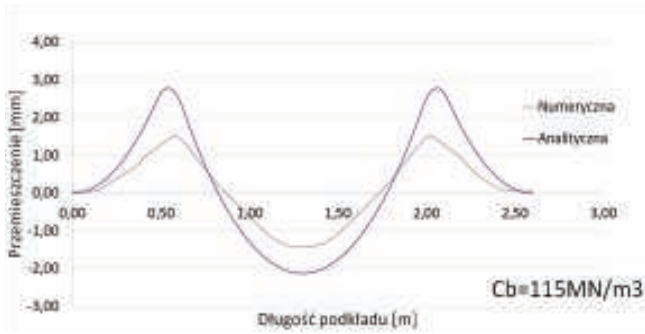
Wartości przemieszczeń dla podkładu PS-94 [Wskaźnik podłoża podkładu 75MN/m <sup>3</sup> ]							
	Numeryczna	Analityczna					
		różnica [%]	$I_{p1} = 27000 \text{ cm}^4$	różnica [%]	$I_{p2} = 17127 \text{ cm}^4$	różnica [%]	$I_{p3} = 8884 \text{ cm}^4$
min	0,9208	7,05%	0,9907	5,30%	0,9738	1,85%	0,9378
max	1,0746	2,71%	1,0463	1,86%	1,0560	0,28%	1,0776

Tab. 2. Porównanie wartości przemieszczeń podkładu PS-94 dla metody numerycznej i analitycznej z uwzględnieniem momentu bezwładności  $I_p$ . Wartość współczynnika podłoża  $C_b = 115 \text{ MN/m}^3$

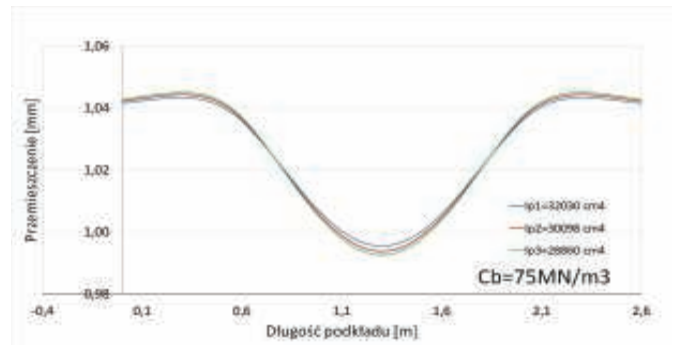
Wartości przemieszczeń dla podkładu PS-94 [Wskaźnik podłoża podkładu 115MN/m <sup>3</sup> ]							
	Numeryczna	Analityczna					
		różnica [%]	$I_{p1} = 27000 \text{ cm}^4$	różnica [%]	$I_{p2} = 17127 \text{ cm}^4$	różnica [%]	$I_{p3} = 8884 \text{ cm}^4$
min	0,5774	5,85%	0,6359	4,36%	0,6210	1,28%	0,5902
max	0,7117	2,35%	0,6882	1,47%	0,6970	0,52%	0,7170

Tab. 3. Porównanie wartości przemieszczeń podkładu PS-94 dla metody numerycznej i analitycznej z uwzględnieniem momentu bezwładności  $I_p$ . Wartość współczynnika podłoża  $C_b = 155 \text{ MN/m}^3$

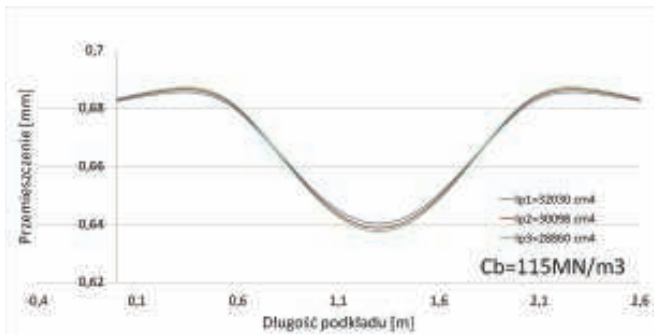
Wartości przemieszczeń dla podkładu PS-94 [Wskaźnik podłoża podkładu 155MN/m <sup>3</sup> ]							
	Numeryczna	Analityczna					
		różnica [%]	$I_{p1} = 27000 \text{ cm}^4$	różnica [%]	$I_{p2} = 17127 \text{ cm}^4$	różnica [%]	$I_{p3} = 8884 \text{ cm}^4$
min	0,4332	3,17%	0,4649	1,82%	0,4515	0,91%	0,4241
max	0,5258	1,11%	0,5146	0,29%	0,5229	1,61%	0,5419



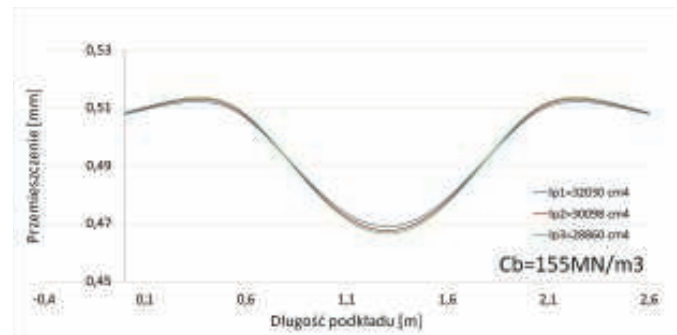
10. Porównanie wartości naprężeń w podkładzie PS-94 dla metody numerycznej i analitycznej z uwzględnieniem momentu bezwładności  $I_p=8884 \text{ cm}^4$ . Wartość współczynnika podłoża  $C_b=115 \text{ MN/m}^3$



11. Linia ugięcia podkładu PS-08 dla maksymalnej średniej i minimalnej wartości momentu bezwładności i wskaźnika podłoża podkładu  $C_b=75 \text{ MN/m}^3$



12. Linia ugięcia podkładu PS-08 dla maksymalnej średniej i minimalnej wartości momentu bezwładności i wskaźnika podłoża podkładu  $C_b=115 \text{ MN/m}^3$



13. Linia ugięcia podkładu PS-08 dla maksymalnej średniej i minimalnej wartości momentu bezwładności i wskaźnika podłoża podkładu  $C_b=155 \text{ MN/m}^3$

maksymalnej, średniej i minimalnej wartości momentu bezwładności przy wykorzystaniu modelu analitycznego oraz różnych wartości wskaźnika podłoża podkładu.

W wyniku przeprowadzonej analizy porównawczej zauważano, że na linię ugięcia podkładu strunobetonowego typu PS-94 duży wpływ ma przyjęty moment bezwładności. Porównując wyniki otrzymane w analizie analitycznej z tymi otrzymanymi z analizy numerycznej – okazują się, że uzyskane wyniki z obu metod mają najbardziej zbliżone wartości w przypadku przyjęcia minimalnego momentu bezwładności podkładu

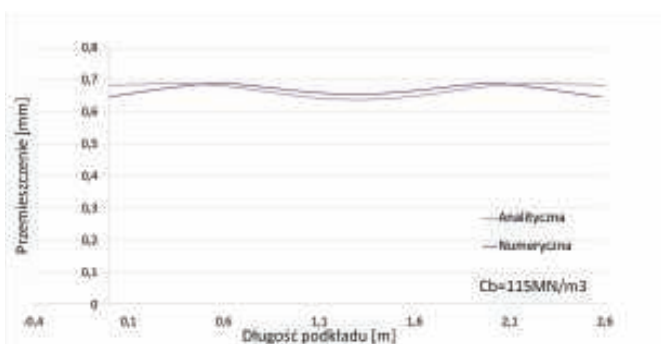
w analizie analitycznej. Na rysunku 9 przedstawiono porównanie linii ugięcia podkładu PS-94 uzyskaną w metodzie numerycznej z wynikami analizy analitycznej dla najmniejszego momentu bezwładności  $I_p=8884 \text{ cm}^4$ . Przedstawiono wynik dla jednej wartości współczynnika podłoża podkładu  $C_b=115 \text{ MN/m}^3$ , pozostałe wyniki kształtują się analogicznie.

W tabelach (Tab. 1, 2 i 3) zestawiono wartości minimalne i maksymalne przemieszczeń podkładu dla wszystkich współczynników podłoża.

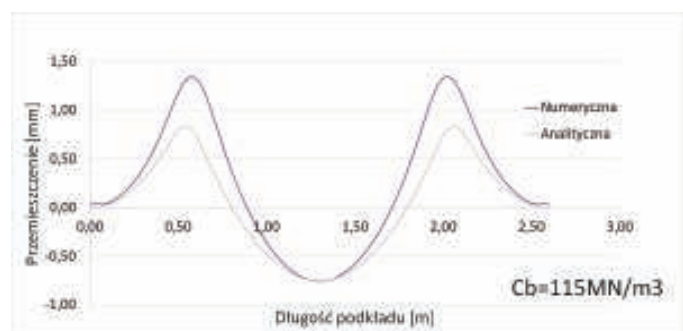
Dla współczynnika  $C_b=115 \text{ MN/m}^3$  można zauważyć, że różnica wartości przemieszczeń obliczonych w obu

metodach, zwiększa się wraz ze wzrostem wartości momentu bezwładności. Dla minimalnej wartości momentu bezwładności porównano również wartości naprężeń uzyskanych z metody numerycznej oraz metody analitycznej. Na rysunku 10 przedstawiono wyniki tej analizy.

Analogiczne obliczenie przeprowadzono również dla podkładu strunobetonowego typu PS-08. Na rysunkach 11, 12 i 13 przedstawiono linię ugięcia podkładu PS-08 dla maksymalnej, średniej i minimalnej wartości momentu bezwładności oraz różnych wartości wskaźnika podłoża podkładu.



14. Porównanie linii ugięcia podkładu PS-08 dla metody numerycznej i analitycznej z uwzględnieniem momentu bezwładności  $I_p=288860 \text{ cm}^4$ . Wartość współczynnika podłoża  $C_b=115 \text{ MN/m}^3$



15. Porównanie wartości naprężeń w podkładzie PS-08 dla metody numerycznej i analitycznej z uwzględnieniem momentu bezwładności  $I_p=288860 \text{ cm}^4$ . Wartość współczynnika podłoża  $C_b=115 \text{ MN/m}^3$

Po analizie uzyskanych wyników stwierdzono, że przyjęty moment bezwładności ma dużo mniejszy wpływ na linię ugięcia podkładu strunobetonowego typu PS-08 niż miało to miejsce w przypadku podkładu PS-94. Zależność ta wynika z faktu iż, przekrój podkładu PS-08 jest znacznie mniej zróżnicowany a poszczególne momenty bezwładności (minimalny, średni i maksymalny) różnią się względem siebie w niewielkim stopniu.

Na rysunku 14 przedstawiono porównanie linii ugięcia podkładu PS-80 uzyskaną w metodzie numerycznej z wynikami analizy analitycznej dla najmniejszego momentu bezwładności  $I_p = 8884 \text{ cm}^4$ . Przedstawiono wynik dla jednej wartości współczynnika podłoża podkładu  $C_b = 115 \text{ MN/m}^3$ , pozostałe wyniki kształtują się analogicznie.

Zestawienie wartości minimalnych i maksymalnych przemieszczeń podkładu PS-08 dla wszystkich współczynników podłoża zawarto w tabelach (Tab. 4. do Tab. 6)

Powyższe zestawienie wskazuje na bardzo dobrą zgodność uzyskanych wyników (różnice na maksymalnym poziomie 1,20%). Dla współczynnika  $C_b = 115 \text{ MN/m}^3$  można zauważyć, że wartości przemieszczeń obliczonych w obu metodach, różnią się nieznacznie dla najmniejszej wartości momentu bezwładności – średnio o 0,49%.

Dla minimalnej wartości momentu bezwładności porównano również wartości naprężeń uzyskanych z metody numerycznej oraz metody analitycznej. Na rysunku 15 przedstawiono wyniki tej analizy.

## Wnioski

Przyjęty, minimalny moment bezwładności ma dużo mniejszy wpływ na linię ugięcia podkładu strunobetonowego typu PS-08 niż ma to miejsce w przypadku podkładu PS-94. Zależność ta wynika z faktu iż, przekrój podkładu PS-08 jest znacznie mniej zróżnicowany i na całej długości jest zbliżony do prostokątnego. Tym niemniej różnice uzyskane w przypadku podkładu PS-94 nie są znaczące – przy

**Tab. 4.** Porównanie wartości przemieszczeń podkładu PS-08 dla metody numerycznej i analitycznej z uwzględnieniem momentu bezwładności  $I_p$ . Wartość współczynnika podłoża  $C_b = 75 \text{ MN/m}^3$

Wartości przemieszczeń dla podkładu PS-08 [Wskaźnik podłoża podkładu $75 \text{ MN/m}^3$ ]							
	Numeryczna	Analityczna					
		różnica [%]	$I_p = 32030 \text{ cm}^4$	różnica [%]	$I_p = 30098 \text{ cm}^4$	różnica [%]	$I_p = 28860 \text{ cm}^4$
min	0,9910	0,46%	0,9956	0,29%	0,9939	0,17%	0,9927
max	1,0539	1,00%	1,0435	0,94%	1,0445	0,83%	1,0452

**Tab. 5.** Porównanie wartości przemieszczeń podkładu PS-08 dla metody numerycznej i analitycznej z uwzględnieniem momentu bezwładności  $I_p$ . Wartość współczynnika podłoża  $C_b = 115 \text{ MN/m}^3$

Wartości przemieszczeń dla podkładu PS-08 [Wskaźnik podłoża podkładu $115 \text{ MN/m}^3$ ]							
	Numeryczna	Analityczna					
		różnica [%]	$I_p = 32030 \text{ cm}^4$	różnica [%]	$I_p = 30098 \text{ cm}^4$	różnica [%]	$I_p = 28860 \text{ cm}^4$
min	0,6457	0,54%	0,6404	0,70%	0,6388	0,81%	0,6377
max	0,6889	0,32%	0,6857	0,23%	0,6866	0,17%	0,6872

**Tab. 6.** Porównanie wartości przemieszczeń podkładu PS-08 dla metody numerycznej i analitycznej z uwzględnieniem momentu bezwładności  $I_p$ . Wartość współczynnika podłoża  $C_b = 155 \text{ MN/m}^3$

Wartości przemieszczeń dla podkładu PS-08 [Wskaźnik podłoża podkładu $155 \text{ MN/m}^3$ ]							
	Numeryczna	Analityczna					
		różnica [%]	$I_p = 32030 \text{ cm}^4$	różnica [%]	$I_p = 30098 \text{ cm}^4$	różnica [%]	$I_p = 28860 \text{ cm}^4$
min	0,4631	0,60%	0,4690	0,45%	0,4676	0,35%	0,4666
max	0,5242	1,20%	0,5122	1,12%	0,5131	1,06%	0,5137

średniej wartości wskaźnika podłoża podkładów  $C_b = 115 \text{ MN/m}^3$  wynosi około 3%.

Porównując wyniki otrzymane w analizie analitycznej z tymi otrzymanymi z analizy numerycznej – okazują się, że uzyskane wyniki ugięć z obu metod mają najbardziej zbliżone wartości w przypadku przyjęcia minimalnego momentu bezwładności podkładu w analizie analitycznej. W przypadku naprężeń występują większe różnice – zgodnie z pokazaną metodą można tak dobrać wartość momentu bezwładności aby zminimalizować różnice zarówno w sensie naprężeń, jak i przemieszczeń. Należy zatem zauważyć, że przyjęta metodologia pozwala na wyznaczenie ekwiwalentnego, stałego na długości podkładu momentu bezwładności, co może mieć zastosowanie do analiz modelowych nawierzchni kolejowej, zwłaszcza modeli dynamicznych. ◀

## Materiały źródłowe

- [1] Buczkowski W.: Rozwiązywanie belek o zmiennej sztywności metodą różnic skończonych. Architektura, 8 (3-4), 2009, s. 49-64
- [2] Bednarek W.: Wpływ pionowych odkształceń nawierzchni i podtorza na pracę toru bezстыkowego. Rozprawy Politechniki Poznańskiej, nr 506, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2013
- [3] Czyczuła W., Koziół P., Błaszkiwicz D. - On the Equivalence between Static and Dynamic Railway Track Response and on the Euler-Bernoulli and Timoshenko Beams Analogy, Shock and Vibration, Volume 2017 (2017), Article ID 2701715
- [4] Krocak S., Mazur S., Dudek Z.: Teoretyczna analiza wpływu zmiennej sztywności I sposobu podparcia podkładu kolejowego na jego pracę. Materiały VII Konferencji "Drogi Kolejowe", 1993, s. 141-150
- [5] Odrowąż M.: Obroty podkładów jako efekt nierównomiernego obciążenia toków szynowych. Praca dyplomowa napisana pod kierunkiem W. Czyczuły, Politechnika Krakowska, Kraków 2016