

# Modelowanie matematyczne i analiza dynamiczna zjawisk zachodzących na rozjazdach kolejowych

## Mathematical modeling and analysis of dynamic phenomena turnout rail



**Rafał Kowalik**

Dr inż.

Wyższa Szkoła Oficerska Sił Powietrznych w Dęblinie,  
Katedra Awioniki i Systemów Sterowania

r.kowalik@wsosp.pl



**Emil Sadowski**

Mgr inż.

P.U.H. HESTA

emil@hesta.com.pl

**Streszczenie:** W artykule przedstawiono wyniki badań symulacyjnych przeprowadzonych dla zjawisk zachodzących na rozjeździe kolejowym w chwili przejazdu pojazdu kolejowego. Główny nacisk położona na uzyskanie przebiegów wszystkich trzech sił występujących w obszarze punktu kontaktowego koło-szyna. Testy przeprowadzono dla różnych prędkości pojazdu szyna-tor. Ponadto zaprezentowano również modele matematyczne opisujące ruch przejazdu pociągu przez rozjazd kolejowy oraz omówiono rozważania matematyczne opisujące ugięcie belki pod wpływem toczącego się po niej koła. Na samym końcu przedstawiono wnioski wynikające z przeprowadzonych symulacji.

**Słowa kluczowe:** Rozjazd kolejowy; Kontakt koło szyna; Siła normalna

**Abstract:** The article presents the results of simulations carried out for the developments on the railway junction in the instantaneous passage of a railway vehicle. The main focus lies on getting runs all three forces present in the area of the point of contact wheel-rail. Tests carried out for different vehicle speed rail-track. In addition, also presented mathematical models describing the motion of the train to pass through the railway track and discusses the mathematical considerations describing the deflection of the beam under the influence of rolling wheels on it. At the end shows the conclusions of the simulations.

**Keywords:** Railway track; The wheel rail contact; Normal force

Trwające prace modernizacyjne infrastruktury kolejowej w Polsce mają za zadanie przystosowanie jej do zwiększenia dopuszczalnej prędkości przejazdu pociągu przez tory. Wiąże się to także ze zmianami w samej konstrukcji napędów zwrotnicowych oraz zwiększenia siły trzymania samej iglicy. Do kolejnych problemów w związku z wprowadzeniem kolei szybkich prędkości w Polsce należy ocena zużywalności torów oraz ocena ich elastyczności na poruszanie się pociągów z dużą prędkością. Wobec tych działań konieczne staje się oszacowanie stanu obecnie istniejącej infrastruktury kolejowej i przeprowadzenie analizy dynamicznej poruszającego się po niej pociągu z prędkością powyżej 250 km/h.

### Kontakt szyna - koło

Ważnym zagadnieniem, które należy poruszyć w przypadku omawiania mechanizmów zwrotnicowych, jest analiza obszaru styku koła z szyną główną w chwili jednoczesnego przejścia kół wózków

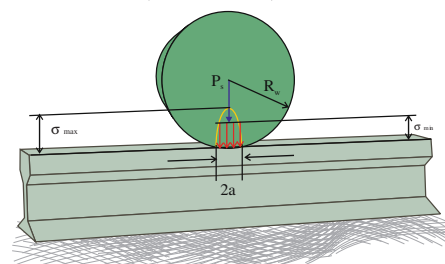
wchodzących w skład pociągu na iglicę. Problematyka ta w odniesieniu do samego kontaktu szyna-koło omówiona została między innymi w publikacjach [4],[5],[6] i [7], zaś sam aspekt kontaktu koła z elementami torowymi wchodzącymi w skład mechanizmu zwrotnicowego jak dotąd nie został wystarczająco przedstawiony choć pewne wiadomości odnośnie tego zagadnienia znaleźć można w publikacji [1] i [12]. Na podstawie dostępnych teorii Hertz'a Eisenmann wyprowadził zależność, z której wyznaczyć można całkowitą powierzchnię kontaktu koła z szyną [10]:

$$\sigma_{\text{średnie}} = \frac{P_s \cdot 10^3}{2a \cdot 2b} \quad (1)$$

gdzie  $2b$  [mm] jest szerokością koła kolejowego, dla którego wyznaczana jest powierzchnia styku. W rozważaniach przeprowadzonych przez Eisenmanna założono, że  $2b = 12$  mm, wobec tego wartość  $2a$  wyznaczyć można z wyrażenia:

$$2a = 3,04 \cdot \left[ \frac{P_s \cdot R_w \cdot 10^3}{2bE} \right]^{0,5} \quad (2)$$

Zaznaczyć należy, iż wartości obciążeń, jakie wywierane są przez koło wózka wagonu kolejowego przekraczają granice plastyczności materiału, z którego wykonano koło lub szynę kolejową. W takich przypadkach plastyczność płaszczyzny powstałej w efekcie styku koła wózka wagonu z szyną ulega zniekształceniu, a dzieje się tak z powodu wystąpienia odkształceń zachodzących na powierzchni szyny kolejowej w wyniku działania sił kontaktowych, między innymi siły tarcia. Biorąc powyższe założenia pod uwagę, przyjąć można, że obszar powstały w wyniku styku szyny kolejowej z kołem będzie prostokątem o długości  $2a$  i szerokości  $2b$  przy założeniu, że kontakt koła z szyną na wszystkich wózkach



1. Dane techniczne występujące w zjawisku kontaktu szyny z kołem [10]

wagonów trwał podobny czas i odbywał się w identycznych warunkach. Oczywiście materiały z których wykonano oba elementy, nie straciły za bardzo na swej plastyczności w wyniku zmiany temperatury otoczenia. Stąd zależność na obliczenie długości trwania kontaktu koła z szyną wygląda następująco [10]:

$$2a = 3,19 \cdot \left[ \frac{P_s \cdot (1 - v^2) R_w \cdot 10^3}{\omega E} \right]^{0,5} \quad (3)$$

Uwzględniając wymaganą wytrzymałość stali, z której wytworzono szynę kolejową oraz jej odporność na „zmęczenie” materiału, zaproponowano formułę matematyczną na jej graniczną wartość naprężenia, określającą między innymi wytrzymałość stali na jej ewentualne „rozciąganie” w wyniku toczenia po niej koła wózka wagonu.

$$\sigma_{toczenia} = 0,5\sigma_{url} \quad (4)$$

W większości badanych przypadków rozkład nacisku kontaktowego zachodzi głównie w obszarze „główek” szyny i jest ściśle powiązany z naprężeniem głównym. Z przeprowadzonych do tej pory doświadczeń wynika, że powstawanie mniejszych lub większych nacisków na szynie kolejowej nie jest powiązane w żaden sposób ze wzrostem głębokości powierzchni główki szyny.

Wartości średnie siły toczenia wyznacza się z następującego równania [10]:

$$\tau_{max} = 0,3\sigma_{\text{średnie}} \rightarrow \tau_{max} = 410 \sqrt{\frac{P_s}{R_w}} \quad (5)$$

Jak wykazano wcześniej, toczenie i poślizgi występujące w skutek oddziaływania koła na szynę kolejową są ze sobą ściśle powiązane. Ponadto wykorzystując teorię odkształceń materiałów można wyznaczyć górne wartości nacisku, jaki może oddziaływać na szynę w wyniku toczonego się koła. Zatem otrzymano

$$\tau_{g\text{órne}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_{\text{średnie}} \rightarrow \tau_{g\text{órne}} = 0,3\sigma_{url} \quad (6)$$

Wyprowadzone powyżej wyrażenie oraz omówione kryteria odnoszą się do metody wykonywania samych szyn kolejowych, uwzględniającej jej możliwe ugięcia i zużycie.

## Model matematyczny ruchu obiektu po szynach

Równanie różniczkowe opisujące ruch pociągu w infrastrukturze szybkiej kolei,

w którym szyna jest belką Eulera–Bernoulliego spoczywającą na sztywnym podłożu jest następujące [14]:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} - k_1 \frac{d^2 w}{dx^2} + kw + \rho \frac{d^2 w}{dx^2} + c \frac{dw}{dt} = P(x, t) \quad (7)$$

gdzie  $w(x,t)$  jest funkcją określającą poprzeczne wygięcie belki [m],  $E$  – oznacza moduł Younga materiału, z którego wykonano belkę (szynę),  $I$  – drugi moment bezwładności,  $k$  – współczynnik sprężystości przypadający na długość belki ( $N/m^2$ ),  $k_1$  – współczynnik określający ścieralność belki w podłożu ( $N$ ), – masa pociągu poruszającego się belce na jej określonej długości [ $kg/m$ ],  $c$  – jest współczynnikiem tłumienia zdefiniowanym na pewnym odcinku belki [ $Ns/m^2$ ],  $P(x,t)$  jest funkcją obciążenia obiektu ruchomego zdefiniowaną na pewnym odcinku belki [ $N/m$ ],  $w$  – liczbą współrzędnych zmierzonych na wybranym odcinku belki w czasie  $t$ .

Zakładając, że pociąg wraz z dołączonymi do niego wagonami porusza się w kierunku  $x$  (dodatnim) w kartezjańskim układzie współrzędnych ze stałą prędkością  $v$ , to jego współrzędne ruchu  $\xi$  wyznaczone mogą być z zależności  $(x-vt)$ . Następnie podstawiając do równania (7) uzyskano

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} - k_1 \frac{d^2 w}{dx^2} + kw + \rho \frac{d^2 w}{dx^2} + c \frac{dw}{dt} = P(x - vt) \quad (8)$$

gdzie  $P$  oznacza obciążenie pociągu na belkę przy stałej prędkości  $v$ . Równanie opisujące tą funkcję jest następujące  $P(x,t) = P\delta(x-vt)$  i wyznaczone jest w punkcie, w którym  $x = 0$ , gdzie  $\delta(t)$  jest funkcją Diraca.

Następnie należy wyznaczyć wielkość parametrów  $k$  i  $k_1$  na podstawie wyprawdzień i badań przeprowadzonych przez Vlozova i Loetive [12]. Stąd dla pojedynczej wartości powierzchni  $H$ , na której zamontowano szyny, współczynniki  $k$  i  $k_1$  definiują zależności

$$k = \frac{E_s}{H(1 + v_s) - (1 + 2v_s)}; \quad k_1 = \frac{E_s H}{6(1 + v_s)} \quad (9)$$

Dzieląc równanie (8) przez  $EI$  otrzymano [14]:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{k_1}{EI} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{k}{EI} w + \frac{\rho}{EI} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{c}{EI} \frac{dw}{dt} = \frac{P}{EI} (x - vt) \quad (10)$$

## Siły na rozjeździe kolejowym

Powszechnie w modelowaniu matematycznej zależności opisującej oddziaływanie siły oddziaływujących jedynie z samego rozjazdu kolejowego, przyjmuje się, że decydujący wpływ na ugięcie iglicy w pierwszym etapie przejazdu pociągu mają siły docisku wywołane przez w naszym przypadku trzy napędy zwrotnicowe, w drugim odcinku ważący wpływ mają siły oporowe wywołane przejazdem pojazdu szynator przez krzyżownicę. W tym momencie zaznaczyć wypada, że obie wymienione siły mają znikomy wpływ na wartości sił kontaktowych zachodzących w efekcie toczenia się koła po szynie. Całkowity brak wpływu nacisku napędów zwrotnicowych widoczny jest również na samych czubku iglicy. Odległość od punktu rozmieszczenia napędów zwrotnicowych w wyniku i uruchomienia wywołana siła trzymania (impuls wyzwalający) zależy od wielu czynników, w tym między innymi od prędkości pociągu przejeżdżającego przez rozjazd kolejowy.

Tab. 1. Dane techniczne pociągu [15]

Wielkość	Wartość
Maksymalna prędkość osiągnięta przez pociąg	250 km/h
Długość pociągu	346 m
Zasilanie	15kV / 16,67 Hz
Liczba wagonów zasilających	6
Moc wyjściowa trakcji	9,9 MW
Rodzaj hamulców	Elektro-mechaniczne
Liczba osi	48 (24 osie napędowe)
Liczba wózków	24 (12 wózków napędnych)
Siła nacisku na oś	<18 t
Maksymalna liczba podpiętych wagonów	12
Szerokość toru	1435 mm
Długość nadwozie	28 m
Rodzaj zasilania	AC

Tab. 2. Parametry techniczne szyny [8]

Drugi moment bezwładności	$EI = 0,266 \times 10^6 \text{ Nm}^2$
Masa	$m = 587 \text{ kg/m}$
Współczynniki tłumienia	$c = 7,25 \times 10^3 \text{ Ns/m}^2$
Współczynnik sprężystości	$53,2 \times 10^6 \text{ N/m}^2$
Siła nacisku	$F_0 = 1 \text{ N}$

W rozjeździe kolejowym zdefiniować można dwie strefy na obszarze których dochodzi do uszkodzeń elementów sterujących lub zdarzają się wykolejenia pojazdu szyna-tor. Są to początkowy odcinek, w którym znajdują się iglica, zaś drugi to fragment gdzie umieszczono krzyżownice.

W dalszej kolejności mając do dyspozycji obie siły wyznaczyć można siłę normalną jaką oddziałuje pojazd szyna-tor na całym odcinku rozjazdu kolejowego. W rozważaniach pominięto tłumienie toru głównego ze względu na jego znikomy wpływ na wyznaczaną wartość siły. Identycznie postąpiono z masą toru głównego. Jednakże wzięto pod uwagę masę iglicy oraz masę części torów znajdujących się za pierwszym napędem zwrotnicowym. Zatem wartość siły normalnej dla pociągu przejeżdżającego przez rozjazd szybkiej kolei wyznaczyć można z zależności:

$$N = \sum F_{nz} + F_s + 2\alpha \cdot V \cdot \sqrt{\frac{M_u}{M_u + M_t}} \cdot \left(1 - \frac{\pi C_t}{4\sqrt{K_t} \cdot (M_u + M_t)}\right) \cdot \sqrt{K_t \cdot M_u} \quad (11)$$

gdzie

$N$  – siła normalna pociągu przejeżdżającego przez rozjazd [kN]

$F_{nz}$  – siła docisku napędów zwrotnicowych [kN]

$F_s$  – statyczna siła powstała w skutek docisku koła na iglicę bądź szynę [kN]

$\alpha$  – kąt nachylenia pomiędzy kołem a torem [rad]

$V$  – prędkość pojazdu szyna-tor [m/s]

$M_u$  – masa wózka wraz z zestawem kołowym [kg]

$M_t$  – masa iglicy w dalszej kolejności toru [kg]

$K_t$  – współczynnik sztywności toru [MN/m]

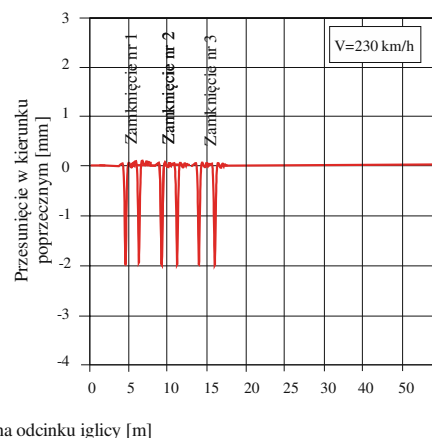
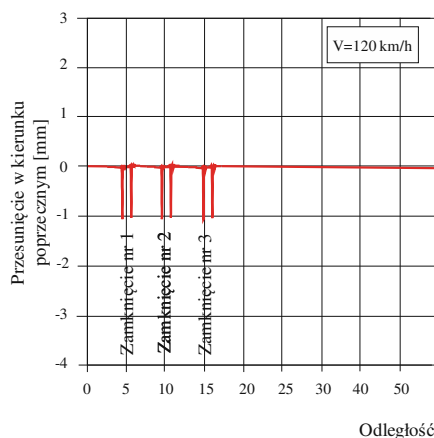
$C_t$  – współczynnik tłumienia toru [kNs/m]

Z kolei sztywność toru rozjazdu kolejowego można oszacować za pomocą modelu elastycznego podłoża na którym znajdują się rozjazd. Zatem ugięcie iglicy pod obciążeniem w określonym punkcie na można zapisać jako:

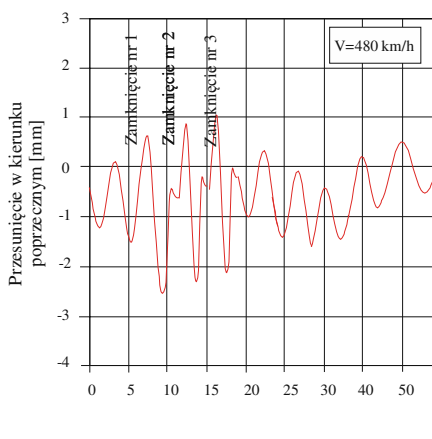
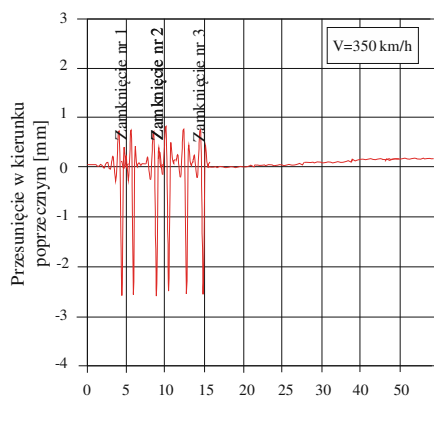
$$K_t = \frac{P}{y} = 8\beta^3 EI \quad (12)$$

gdzie

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k_f}{EI}} \quad (13)$$



2. Wykres przesunięcia szyny w kierunku Y (poprzecznym) uzyskany przy prędkości  $v = 120$  [km/h] oraz  $v = 230$  [km/h]



3. Wykres przesunięcia szyny w kierunku Y (poprzecznym) uzyskany przy prędkości  $V = 350$  [km/h] oraz  $V = 480$  [km/h]

gdzie

$E$  – Moduł Younga

$I$  – Moment bezwładności iglicy bądź szyny

$k_f$  – współczynnik definiujący nacisk wywoływany przez pojedyncze koło  $k_f = 4,104F_{zn} + 14,61$  [MPa]

## Badania symulacyjne

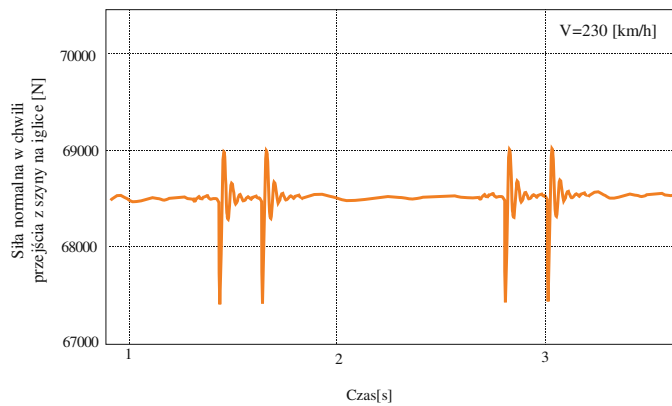
Przystępując do przeprowadzenia symulacji komputerowych mających dać odpowiedź na pytanie jak zachowa się pociąg jadących z prędkością powyżej 200 km/h przez rozjazd kolejowy. W tym celu na samym początku po pierwsze zdefiniowano dane techniczne obiektu ruchomego, dane techniczne rozjazdu kolejowego oraz określono parametry szyn wchodzących w skład rozjazdu kolejowego. Poprawnie zdefiniowanie tych danych pozwoli na wyznaczenie granicznych prędkości, po przekroczeniu, których nastąpić może wykolejenie pociągu.

W tym celu wykorzystano dane techniczne pociągu produkowanego przez

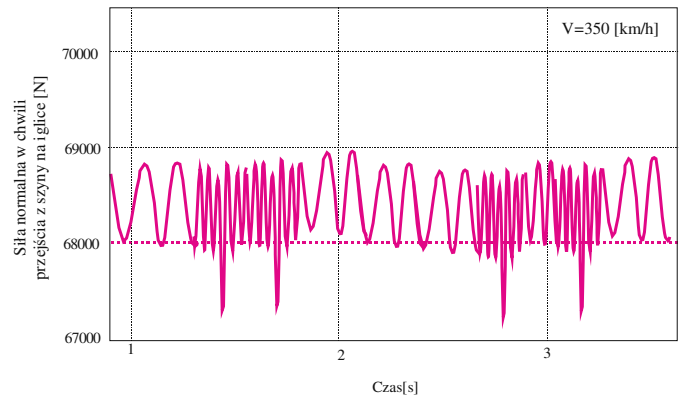
firmę Siemens (tabela 1). Podczas symulacji pociąg o danych technicznych zawartych w tabeli 1 poruszał się po szynach o parametrach przedstawionych w tabeli 2.

Na samym początku symulacji wykorzystano równania numeryczne omówione we wcześniejszych podpunktach oraz podjęto próbę oszacowania siły nastawczej koniecznej do przełączenia iglicy na rozjeździe kolejowym.

W kolejnej analizie podjęto próbę oceny nacisku, jakie wywierany jest przez koło na przejściu z szyny na iglicę. W tym celu posłużono się różniczkowym równaniem opisującym ruch pociągu w kolejach szybkich prędkości oraz wykorzystano faktyczne parametry pociągu, konkretnie w obliczeniach numerycznych wykorzystano dane techniczne pociągu ICE-3 [14], które obecnie kursują po niemieckich kolejach szybkich prędkości. Badanie te wykonano na odcinku iglicy o długości około 20 metrów dla różnych wartości prędkości pociągu: 120, 230, 350, 480 [km/h]. Uzyskane rezultaty dla przejazdu pociągu szybkich



4. Przebieg siły normalnej przejścia koła z szyny na iglicę przy prędkości [ $v = 230$  km/h]



5. Przebieg siły normalnej przejścia koła z szyny na iglicę przy prędkości [ $v = 350$  km/h]

kolei przez rozjazd kolejowy można wykorzystać do poprawy i unowocześnienia układu napędów zwrotnicowych.

Na samym końcu wykonano symulację kontaktu koło - szyna na elemencie iglicy rozjazdu kolejowego. Podobnie jak to miało miejsce wcześniej, do obliczeń numerycznych wykorzystano wiedzę i równania różniczkowe opublikowane w publikacji [6]. Test wykonano pociągu o dla danych technicznych zawartych w tabeli 1, parametry szyny ujęto w tabeli 2. Wyniki z tego etapu badań zaprezentowano na poniższych wykresach.

## Wnioski

Jak można zauważyć na podstawie zaprezentowanych wyników z przeprowadzonych badań symulacyjnych, dynamika i prędkość poruszania się pociągu po mechanizmie zwrotnicowym zamontowanym na torach znacząco się różni od rezultatów uzyskiwanych na prostym odcinku toru. Wynika to z faktu, iż przejście szyny na iglicę realizowane jest nie płynnie, następuje przesuw całego układu w kierunku osi Y na odcinku zamontowania rozjazdu. Testy mające na celu oszacowanie przesunięcia poprzecznego, jaki następuje w chwili przejazdu przez rozjazd, rozpoczęto od prędkości 120 km/h stopniowo ją zwiększając, aż do wartości 480 km/h. Uzyskane wyniki pozwalają wysnuć wniosek, że w momencie przejazdu pociągu przez rozjazd kolejowy z prędkością powyżej 200 km/h nastąpić może jego wykolejenie, aby zapobiec takim skutkom należy w rozjazdach kolejowych stosować napędy zwrotnicowe o sile nastawczej przekraczającej 7 kN.

Ponadto w symulacjach potwierdzono hipotezę, iż siła trzymania napędu

zwrotnicowego w środowisku, którego temperatura przekroczy wartość 28°C znacznie spada. Odwrotnie zaś to wygląda, kiedy temperatura powietrza będzie oscylować poniżej 10°C - jej wartość będzie wzrastać.

Uzyskane rezultaty dla przejazdu pociągu szybkich kolei przez rozjazd kolejowy można wykorzystać do poprawy i unowocześnienia układu sprzężenia zamknięć nastawczych oraz określenia minimalnych wartości siły sprężynowania iglicy i jej maksymalnego oporu przestawiania.

Mając na uwadze bezpieczeństwo pasażerów można uznać, iż rozjazdy obecnie wykorzystywane w infrastrukturze kolejowej mogą okazać się elementami narażonymi na szybsze zużycie, co pośrednio może stać się przyczyną wystąpienia sytuacji zagrażających bezpieczeństwu samych pasażerów.

Przedstawione wyniki pokazują metodologię badań zjawisk dynamicznych przy przejeździe pociągu przez rozjazd. Zaprezentowane w niniejszym artykule wyniki z analizy dynamicznej przejazdu pociągu poszerzone mogą być o wyznaczenie stateczności pociągu w chwili przejazdu przez rozjazd. ◀

## Materiały źródłowe

[1] Cao Y., Ping W., Zhao W. H., Zhao C. Y., "The Influences on Turnout Dynamic Responses due to its Irregularities", Applied Mechanics and Materials, Vols. 105-107, pp. 1181-1186, 2012  
 [2] Chen R., Ping W., Wei X. K., "Influence of Conversion Deviation on Dynamic Performance of High-Speed Railway Turnout", Key Engineering Materials, Vols. 474-476, pp. 1599-1604, 2011

[3] Chen R., Ping W., Song Y., "Wheel/Rail Contact Geometry of Different Wheel Tread Profile in High-Speed Railway Turnout", Advanced Materials Research, Vols. 255-260, pp. 3988-3992, 2011  
 [4] Chen R., Ping W., Zhao W. H., "Longitudinal Interaction between Welded Turnout on Continuous-Slab-Track and Bridge", Advanced Materials Research, Vols. 217-218, pp. 976-981, 2011  
 [5] Bajon W., Osiński Z., Szafranski W.: Elektryczne napędy zwrotnicowe, Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, Warszawa 1969.  
 [6] Garg V., Dynamics of Railway Vehicle Systems, Elsevier Inc, 1984  
 [7] Iwnicki S., Handbook of Railway Vehicle Dynamics, CRC Press 2006  
 [8] Kisilowski Jerzy, Kowalik Rafał, Kwiecień Katarzyna „Analiza dynamiczna przejazdu pociągów szybkiej kolei przez rozjazd kolejowy”, Logistyka 6/2014  
 [9] Kisilowski J., Knothe K., Advanced Railway Vehicle System Dynamics, WNT, Warszawa 1991,  
 [10] Kisilowski J., Dynamika Układu Mechanicznego Pojazdu Szynowy-Tor, PWN, Warszawa 1991  
 [11] Kisilowski J., Współpraca taboru z nawierzchnią w Kolejach Dużych Prędkości, Logistyka  
 [12] Mu C. Y., Feng B., Sui M. G., Wang A. M., "Testing Research of Physical and Mechanical Properties of Snows on Railroad Switch", Applied Mechanics and Materials, Vols. 380-384, pp. 4387-4390, 2013  
 [13] Wang P. Design of High-Speed Railway Turnouts 1st Edition, Theory and Applications, Academic Press, 2015  
 [14] Xu H., Wang P., Liu D., Xu J. H., Chen R., "Maintenance Technologies Research of High Speed Turnout", Applied Mechanics and Materials, Vols. 97-98, pp. 114-120, 2011