

Drgania płyty o średniej grubości spoczywającej na podłożu odkształcalnym pod obciążeniem impulsowym

Vibrations of thick plate resting on a deformable foundation under impulse load



Waclaw Szczesniak

Prof. dr inż.

Wydział Budownictwa i Architektury, Politechnika Lubelska

w.szczesniak@il.pw.edu.pl



Magdalena Ataman

dr inż.

Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Warszawska

m.ataman@il.pw.edu.pl

Streszczenie: Przedmiotem rozważań w pracy jest analiza prostokątnej płyty sprężystej o średniej grubości obciążonej impulsem siły typu Diraca. Płyta spoczywa na uogólnionym, dwuparametrowym i trójkierunkowym podłożu sprężystym typu Winklera. Ugięcia dynamiczne płyty wyznaczono analitycznie w postaci podwójnego szeregu. Wyniki rozwiązań zilustrowano wykresami stosując pakiet „MATHEMATICA”.

Słowa kluczowe: Płyta średniej grubości; Impuls siły; Uogólnione podłoże Winklera

Abstract: The paper deals with vibrations of thick plate resting on generalized Winkler's foundation. The plate is subjected to the impulse of force. Governing equations of the problem, analytical solution as well as numerical example are presented. Results of calculations are shown in the figures. Solution and diagrams are obtained by means of "Mathematica" code

Keywords: Thick plate; Impulse of force; Generalized Winkler's foundation

Tematem pracy jest analiza prostokątnej płyty sprężystej o średniej grubości obciążonej impulsem siły typu Diraca. Płyta spoczywa na uogólnionym, dwuparametrowym i trójkierunkowym podłożu sprężystym typu Winklera uwzględniającym poziome składowe jego reakcji. Przyjęta do rozważań teoria jest wariantem znanej teorii Ambarcumiana [1], gdzie wprowadza się ugięcie w oraz dwie funkcje naprężeń χ_x i χ_y [4-9]. W ogólnym przypadku wraz z efektem

tarczowym, mamy do czynienia z pięcioma równaniami ruchu określającymi trzy przemieszczenia u , v , i w oraz dwie funkcje naprężeń χ_x i χ_y . Przy pominięciu efektu drgań tarczowych w płaszczyźnie środkowej płyty, i tak skomplikowany układ pięciu równań dziesiątego rzędu, ograniczono do jednego równania czwartego rzędu, opisującego ugięcie $w = w(x, y, t)$, oraz do układu dwóch sprzężonych równań opisujących naprężenia χ_x i

χ_y . Obciążeniem płyty jest impuls siły S typu Diraca przyłożony w dowolnym punkcie na górnej powierzchni. Płyta spełnia warunki brzegowe przegubowego podparcia na obwodzie, które też zależą od pionowych i poziomych składowych reakcji podłoża opisanych współczynnikami k_z i k_t .

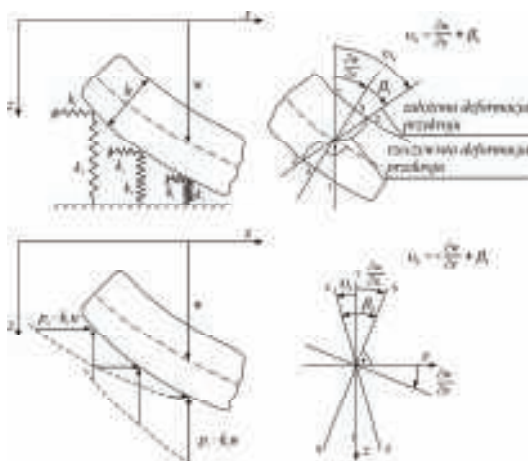
Równania ruchu płyty

Równania ruchu płyty o średniej grubości można wyprowadzić na wiele sposobów, lokalnie na przykład z równań kinetostatyki lub globalnie z całkowitej zasady Hamiltona.

Zakładając model podłoża sprężystego Winklera opisany dwoma współczynnikami k_z oraz k_t , zależnymi od własności mechanicznych i od grubości warstwy podłoża [6]

$$p_z = k_z w, \quad p_t = k_t u_i, \quad i = x, y, \quad (1)$$

poziome i pionowe siły na dolnej płaszczyźnie określone są wyrażeniami:



1. Płyta o średniej grubości na uogólnionym trójkierunkowym podłożu Winklera

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \frac{k_t h}{4} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} w + \frac{k_t h^3}{24(1-\nu)} \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{bmatrix},$$

$$Z_2 = p - k_z w, \quad (2)$$

gdzie w jest ugięciem powierzchni środkowej płyty, zaś χ_x i χ_y są pewnymi funkcjami związanymi naprężeniami stycznymi τ_{xz} i τ_{yz} . Na rysunku 1 pokazano podłoże dwuparametrowe, trójkierunkowe oraz hipotezę kinematyczną odnoszącą się do przemieszczeń płyty. Więcej szczegółów na temat założeń dotyczących płyt o średniej grubości podano w pracach [4-6]. Funkcje χ_x i χ_y są powiązane z kątami β_x i β_y , tak jak na rysunku 1. Jak łatwo zauważyć na rysunku 1 reakcje uogólnionego podłoża Winklera są zarówno pionowe jak i poziome, dzie-

ki czemu można uwzględnić tarcie pomiędzy spodem płyty a sprężystym podłożem odkształcalnym. Równanie różniczkowe ruchu, wyprowadzone m.in. w pracach [4, 5], opisujące dynamiczne ugięcie w prostokątnej płyty sprężystej zapisujemy w następujący sposób: wg zależności 3,

$$\text{gdzie } \mu = \frac{k_t h^4}{24D(1-\nu)}$$

jest bezwymiarowym współczynnikiem opisującym wpływ nieznanymi funkcji χ_x i χ_y na siły pionowe występujące na dolnej płaszczyźnie płyty,

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

jest sztywnością giętną płyty, w jest ugięciem płyty, ρ jest gęstością materiału płyty, h jest grubością płyty, zaś p jest obciążeniem normalnym do poziomej płaszczyzny środkowej płyty. Należy

zauważyć, że współczynnik podłoża k_t , w równaniu ruchu płyty zawarty jest we współczynniku μ , który jest bardzo mały w porównaniu z jedynką i może być wobec tego pominięty, co jest w pełni technicznie uzasadnione. Jeśli zatem przyjmiemy $\mu = 0$, to podstawowe równanie ruchu płyty (3) upraszcza się i wraz z równaniem opisującym drgania skrętne jest następujące: wg zależności 4.

Przy założeniu, że $p = 0$, $k_z = 0$ i $k_t = 0$ równania (4) określają drgania własne płyty bez uwzględnienia podłoża. Zakładając ruch harmoniczny nietłumiony, funkcje w i ψ zapiszemy następującymi wzorami: wg zależności 5. W równaniach (5) $\omega_{m,n}^{kl}$ oznacza częstość kołową płyty prostokątnej wyznaczoną według teorii klasycznej Kirchhoffa, natomiast c_p i c_s oznaczają odpowiednio prędkość podłużną i poprzeczną fali w płycie [6-8]:

$$c_p^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}, \quad c_s^2 = \frac{G}{\rho},$$

$$c_p = c_s \sqrt{\frac{2}{1-\nu}}. \quad (6)$$

Podstawiając wzory (5) do równania (4) otrzymamy trzy częstości drgań własnych płyty o średniej grubości zapisane w następujący sposób:

$$\omega_{m,n}^{(1,3)} = \frac{c_p}{h\sqrt{12}} \left\{ \frac{1}{2} \left[P_{m,n} \pm (P_{m,n}^2 - Q_{m,n}^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega_{m,n}^{(2)} = \frac{c_p}{h\sqrt{12}} \left[6(1-\nu)(10 + \gamma_{m,n}^2) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

gdzie:

$$P_{m,n} = 60(1-\nu) + (17-5\nu)\gamma_{m,n}^2,$$

$$Q_{m,n} = 4\gamma_{m,n}^2 [15(1-\nu)]^{\frac{1}{2}}.$$

W przypadku podłoża dwuparametrowego wzory (7) ulegają komplikacji i są następujące: wg zależności 8.

W przypadku ugięcia i obciążenia rozwiązania zadania poszukujemy w postaci podwójnych szeregów funkcji własnych:

$$\begin{aligned} & \nabla^4 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{17-6\nu}{60D(1-\nu)} \rho h^3 \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{\rho^2 h^6}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \\ & + k_z \left[\frac{w}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{10D(1-\nu)} \nabla^2 w + \frac{\rho h^5}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] + \\ & - \frac{1}{1-\mu} \left\{ \left[\frac{k_t h^2}{4} \nabla^2 - \mu \left(\rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} + k_z \right) \right] \left[\frac{w}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{60D(1-\nu)} \nabla^2 w + \frac{\rho h^5}{360D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \right\} = \quad (3) \\ & = \frac{p}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{10D(1-\nu)} \nabla^2 p + \frac{\rho h^5}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \\ & + \frac{\mu}{1+\mu} \left[\frac{p}{D} + \frac{(2-\nu)h^2}{60D(1-\nu)} \nabla^2 p + \frac{\rho h^5}{360D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \nabla^4 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{17-6\nu}{60D(1-\nu)} \rho h^3 \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{\rho^2 h^6}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \\ & + k_z \left[\frac{w}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{10D(1-\nu)} \nabla^2 w + \frac{\rho h^5}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] + \\ & - \left\{ \left[\frac{k_t h^2}{4} \nabla^2 \right] \left[\frac{w}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{60D(1-\nu)} \nabla^2 w + \frac{\rho h^5}{360D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \right\} = \quad (4) \\ & = \frac{p}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{10D(1-\nu)} \nabla^2 p + \frac{\rho h^5}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \psi - \frac{10}{h^2} \psi - \frac{\rho h^3}{6D(1-\nu)} \ddot{\psi} = 0, \quad \psi = \frac{\partial \chi_x}{\partial y} - \frac{\partial \chi_y}{\partial x}.$$

$$w = w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}(t) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \cos \omega_{m,n} t, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b},$$

$$\psi(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n}(t) \cos \alpha_m x \cos \beta_n y \cos \omega_{m,n} t, \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad \beta = \frac{h}{a},$$

$$\gamma_{m,n}^2 = h^2 (\alpha_m^2 + \alpha_n^2) = \pi^2 \beta^2 (m^2 + \lambda^2 n^2), \quad \gamma_{m,n}^2 = \gamma_m^2 + \gamma_n^2, \quad \gamma_m^2 = h^2 \alpha_m^2, \quad \gamma_n^2 = h^2 \alpha_n^2, \quad (5)$$

$$\omega_{m,n}^{kl} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \frac{\pi^2 \beta}{a} (m^2 + \lambda^2 n^2) \frac{c_p}{\sqrt{12}} = \frac{\gamma_{m,n}^2 c_p}{h\sqrt{12}}, \quad m, n = 1, 3, 5, \dots$$

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{m,n}(t) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,$$

$$p(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{m,n}(t) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y. \quad (9)$$

Obciążenie impulsem siły zapisujemy w następujący sposób, a delty Diraca rozkładamy w podwójny szereg: wg zależności 10.

Ostatecznie do rozwiązania otrzymamy równanie czwartego rzędu na nieznaną funkcję $q_{m,n} = q_{m,n}(t)$. Celem uproszczenia dalszych zapisów pominiemy we wzorach 11 wskaźniki m i n pisząc np. $q = q(t)$: wg zależności 11.

$$\text{gdzie: } \theta = \frac{k_z}{k_t}, \quad \mu = \frac{k_t h^4}{24D(1-\nu)}, \quad \mu_z = \frac{k_z h^4}{D}, \quad \tilde{\gamma}_{m,n}^2 = h^2(\alpha_m + \beta_n),$$

$$\tilde{\omega}_{m,n}^4 - \frac{1}{12} \left(\frac{c_p}{h} \right) \tilde{P}_{m,n} \tilde{\omega}_{m,n}^2 + \frac{1}{576} \left(\frac{c_p}{h} \right)^4 \tilde{Q}_{m,n}^2 = 0,$$

$$\tilde{P}_{m,n} = P_{m,n} + K_{m,n}, \quad K_{m,n} = \frac{k_z h^4}{D} \left(1 + \frac{\theta \gamma_{m,n}^2}{24} \right),$$

$$\tilde{Q}_{m,n}^2 = 4 \tilde{\gamma}_{m,n}^2 [15(1-\nu)]^{\frac{1}{2}},$$

$$\tilde{\gamma}_{m,n}^4 = \gamma_{m,n}^4 + \frac{k_z h^4}{D} \left\{ 1 + \left[\frac{2-\nu}{10(1-\nu)} + \frac{\theta}{4} \left(1 + \frac{2-\nu}{60(1-\nu)} \gamma_{m,n}^2 \right) \right] \gamma_{m,n}^2 \right\},$$

$$\theta = \frac{k_z}{k_t}, \quad \mu = \frac{k_t h^4}{24D(1-\nu)}, \quad \mu_z = \frac{k_z h^4}{D}, \quad \tilde{\gamma}_{m,n}^2 = h^2(\alpha_m + \beta_n), \quad \lambda = \frac{a}{b},$$

$$\tilde{\omega}_{m,n}^{(1,3)} = \frac{c_p}{h\sqrt{12}} \left\{ \frac{1}{2} \left[\tilde{P}_{m,n} \pm (\tilde{P}_{m,n}^2 - \tilde{Q}_{m,n}^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\tilde{\omega}_{m,n}^{(2)} = \omega_{m,n}^{(2)} = \frac{c_p}{h\sqrt{12}} [6(1-\nu)(10 + \gamma_{m,n}^2)]^{\frac{1}{2}},$$

$$\tilde{\omega}_{m,n}^{(1)} < \tilde{\omega}_{m,n}^{(2)} < \tilde{\omega}_{m,n}^{(1,3)}.$$

$$p = p(x, y, t) = S \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(t - t_0),$$

$$\delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(t - t_0) = \frac{4}{ab} \delta(t - t_0) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \sin \alpha_m x_0 \sin \beta_n y_0,$$

$$p(x, y, t) = S \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(t - t_0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,m}(t) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,$$

$$f_{n,m}(t) = \frac{4S}{ab} \delta(t - t_0) \sin \alpha_m x_0 \sin \beta_n y_0 \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad (10)$$

$$\nabla^2 p(x, y, t) = -\frac{4S}{ab} \sum_n \sum_m (\alpha_m^2 + \beta_n^2) f_{n,m}(t) \sin \alpha_m x_0 \sin \beta_n y_0 \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,$$

$$\frac{\partial^2 p(x, y, t)}{\partial t^2} = \frac{4S}{ab} \sum_n \sum_m \ddot{f}_{n,m}(t) \sin \alpha_m x_0 \sin \beta_n y_0 \sin \alpha_m x \sin \beta_n y.$$

$$q^{IV} + A\ddot{q} + \frac{1}{576} \left(\frac{c_p}{h} \right)^4 Q^2 q = \left\{ \frac{2S c_p^2}{\rho h^3 ab} [(1-\nu) + \tilde{\gamma}^2 (2-\nu) - \frac{\rho h^5 \alpha^2 \nu^2}{12D}] \right\} \delta(t - t_0) \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}, \quad (11)$$

Niejednorodne równanie czwartego rzędu (11) rozwiązano komputerowo przy czterech zerowych warunkach początkowych.

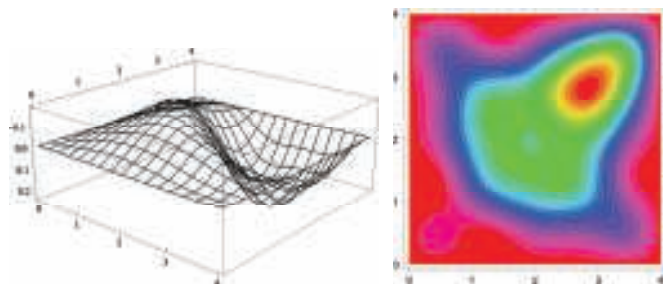
Przykład obliczeniowy

Równanie (11) rozwiązano analitycznie przy wykorzystaniu pakietu Wolframa „MATHEMATICA 10”, również szereg (9) zaprogramowano w tym kodzie.

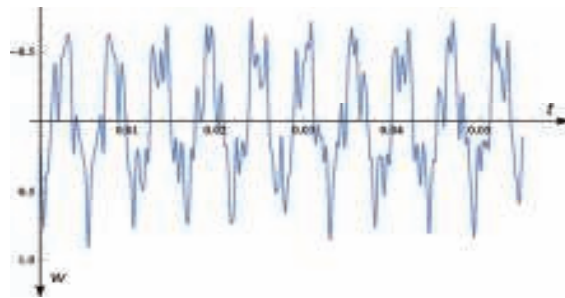
W przykładzie przyjęto następujące dane liczbowe geometryczne i fizyczne płyty: $a = b = 4 \text{ m}$, $h = 0,45 \text{ m}$, $E = 34 \text{ GPa}$, $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0,17$. Zadanie przeanalizowano przy różnych wartościach współczynników sprężystości podłoża k_z i k_t . Obliczenia przeprowadzono w dwóch przypadkach przyłożenia impulsu do górnej powierzchni płyty: w jej środku tj. przy $x_0 = \frac{1}{2}a$, $y_0 = \frac{1}{2}b$ oraz w pobliżu naroża płyty przy $x_0 = \frac{3}{4}a$, $y_0 = \frac{3}{4}b$. Ponieważ rozwiązanie zależy od podwójnego szeregu, który jest wolno zbieżny, to w obliczeniach należy uwzględnić możliwie dużą liczbę jego wyrazów.

Wyniki obliczeń zilustrowano przykładowymi rysunkami. Rysunki 2 i 4 przedstawiają odkształcenie powierzchni środkowej płyty o średniej grubości oraz odpowiadające im płany warstwiczne w chwili $t = \frac{1}{4}T_1$, gdzie T_1 jest pierwszym, najmniejszym okresem drgań własnych płyty. Na rysunku 3 pokazano wykres drgań środka płyty o średniej grubości na podłożu trójkielinkowym ($k_z = k_t = 150 \text{ MN/m}^3$) przy obciążeniu impulsem S w punkcie o współrzędnych $x_0 = \frac{3}{4}a$, $y_0 = \frac{3}{4}b$. Wykres sporządzono dla przedziału czasu $t \in \langle 0; 10T_1 \rangle$.

Dodatkowo, dla porównania, na rysunku 5 pokazano wykresy dotyczące cienkiej płyty Kirchhoffa bez uwzględnienia podłoża, obciążonej pojedynczym impulsem w pobliżu naroża płyty [2]. Ugięcia płyty na wszystkich wykresach podane są w formie bezwymiarowej i są funkcją Greena. Ze względu na rozbudowany współczynnik skalujący nie przytaczamy go tutaj. Znacznie prostszą formę ma



2. Odształcenie powierzchni środkowej płyty o średniej grubości przy uderzeniu impulsem S w pobliżu narożnika płyty ($x_0 = \frac{3}{4}a$, $y_0 = \frac{3}{4}b$) przy $k_z = k_t = 150 \text{ MN/m}^3$, chwila $t = \frac{1}{4}T_1$, oraz odpowiadający mu układ warstwic na płycie



3. Drgania środka płyty o średniej grubości przy uderzeniu impulsem w pobliżu narożnika płyty ($x_0 = \frac{3}{4}a$, $y_0 = \frac{3}{4}b$) przy $k_z = k_t = 150 \text{ MN/m}^3$, w czasie $t \in \langle 0; 10T_1 \rangle$

analogiczny współczynnik w przypadku płyty cienkiej na podłożu Własowa, otrzymany przez autorów w pracach [2, 3]:

$$\hat{w} = w \frac{b \pi^2 \sqrt{D(\bar{m} + m_0)}}{4Sa},$$

$$w(x, y, t) = \frac{4S}{(\bar{m} + m_0)\bar{m}ab} H(t - t_0) \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\omega_{m,n}} \sin \alpha_m x_0 \sin \alpha_n y_0 \sin \alpha_m x \right.$$

$$\left. \sin \alpha_n y \sin \omega_{m,n} t \right). \quad (12)$$

Podsumowanie

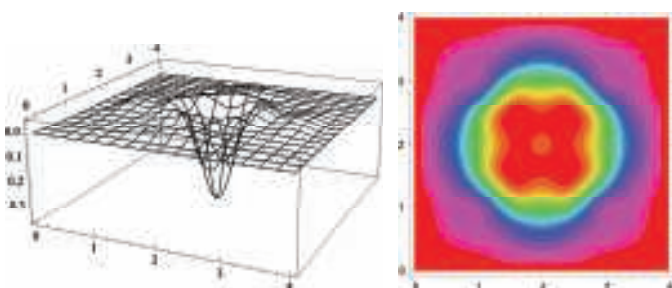
Przedmiotem rozważań w niniejszym referacie jest prostokątna, sprężysta płyta o średniej grubości spoczywająca na uogólnionym trójkierunkowym podłożu sprężystym Winklera uwzględniającym poziome składowe jego reakcji. Obciążenie w postaci impulsu typu delta funkcja Diraca działa dowolnym punkcie na górnej powierzchni płyty. Ugięcia dynamiczne płyty wyznaczono analitycznie w postaci podwójnego szeregu. Ponieważ szereg ten jest wolno zbieżny, to w obliczeniach należy uwzględnić możliwie dużą liczbę jego wyrazów. W pracy analizowano dynamiczne

ugięcia płyty. Korzystając ze wzoru na ugięcie można wyznaczyć również siły wewnętrzne oraz naprężenia w płycie. Analizowany schemat obciążenia określa tzw. funkcję Greena, wykorzystywaną w innych, bardziej złożonych przypadkach rzeczywistych uderzeń na płytach. Wyniki opracowania mogą posłużyć do weryfikacji modelu uderzenia z funkcją kary w MES. Mogą również zostać wykorzystane przez drogowców wykonujących badania wytrzymałościowe nawierzchni aparatem FWD [10, 11]. ◀

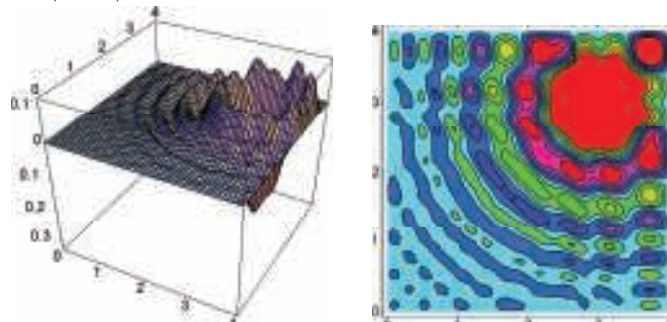
Materiały źródłowe

- [1] Ambarcumian S.A. Teoria anizotropnych płyt. Nauka, Moskwa 1987.
- [2] Ataman M., Szcześniak W. Analiza ugięć płyty sprężystej Kirchhoffa spoczywającej na inercyjnym podłożu Własowa pod impulsem siły. Autobusy. Technika, Eksploatacja, Systemy Transportowe, Instytut Naukowo-Wydawniczy "Spatium", 2016, vol. 17, nr 12, 537-540.
- [3] Ataman M., Szcześniak W. Drgania płyty sprężystej Kirchhoffa spoczywającej na inercyjnym podłożu Własowa wymuszone impulsem siły. Autobusy. Technika, Eksploatacja, Systemy Transportowe, Instytut Naukowo-Wydawniczy "Spatium", 2016, vol. 17, nr 12, 541-544.

- [4] Wang Y.H., Tham L.G. and Cheung Y.K. Beams and plates on elastic foundations: a review. Structural Analysis and CAD. Prog. Struct. Engeng. Mater., 2005, 7, 174-183.
- [5] Szcześniak W. Wybrane zagadnienia z dynamiki płyt. OW PW, Warszawa 2000.
- [6] Szcześniak W. Analiza dynamiczna płyty o średniej grubości. Prace Naukowe PW, Budownictwo 1988, z.101, 1-236.
- [7] Szcześniak W. Drgania płyty o średniej grubości pod obciążeniem ruchomym. Rozprawy Inżynierskie IPPT PAN, 1985, 3, 1-2, 37-53.
- [8] Szcześniak W. Wpływ dwuparametrowego podłoża sprężystego na drgania własne płyty o średniej grubości. Rozprawy Inżynierskie IPPT PAN, 1989, 37, 1, 87-115.
- [9] Szcześniak W. Drgania płyt. Dynamiczne obliczenia nawierzchni drogowej. IBDiM, Warszawa 2000.
- [10] Krawczyk B., Mackiewicz P. Diagnostyka nawierzchni drogowych i lotniskowych z wykorzystaniem zaawansowanych badań dynamicznych. Przegląd Komunikacyjny, 2015, LXX, 10, 14-16.
- [11] Machelski Cz., Mackiewicz P., Szydło A. Wykorzystanie stalowych płyt do uprawnień przejazdu nad wykopami. Przegląd Komunikacyjny, 2015, LXX, 10, 20-21.



4. Odształcenie powierzchni środkowej płyty o średniej grubości przy uderzeniu impulsem S w środku płyty przy $k_z = 150 \text{ MN/m}^3$ i $k_t = 0$, chwila $t = \frac{1}{4}T_1$, oraz odpowiadający mu układ warstwic



5. Odształcona płytka cienka Kirchhoffa podparta przegubowo na obwodzie, bez interakcji podłoża, obciążona pojedynczym impulsem w punkcie $x_0 = \frac{3}{4}a$, $y_0 = \frac{3}{4}b$ i odpowiadający jej układ warstwic [2]