

Modelowanie analogowe w analizie jakościowej rozchodzenia się drgań

Analog modelling in qualitative analysis of vibration propagation



Eligiusz Mieloszyk

Prof. dr hab. inż.

Politechnika Gdańska, Wydział
Inżynierii Lądowej i Środowiska

emieloszyk@mif.pg.gda.pl



Sławomir Grulkowski

Dr inż.

Politechnika Gdańska, Wydział
Inżynierii Lądowej i Środowiska

slawi@pg.edu.pl

Streszczenie: Proces rozprzestrzeniania się drgań zachowuje się analogicznie jak inne znane zjawiska podobne do niego, np. zjawisko drgań układów elektrycznych, mechanicznych, hydraulicznych, zjawisko dyfuzji, zjawisko rozchodzenia się ciepła, zjawisko falowe, czy zjawisko adwekcji. Do analizy problemu zostaną wykorzystane zjawiska podobne i uogólnione układy dynamiczne. Da to możliwość wyciągania wniosków co do zachowania się jednego procesu na podstawie innego, podobnego do niego. Taka koncepcja zostanie wykorzystana przy analizie jakościowej rozchodzenia się drgań, w szczególności w gruncie, czy podłożu gruntowym inżynierskich obiektów transportowych.

Słowa kluczowe: Modelowanie analogowe; Drgania; Przenoszenie drgań; Stateczność obiektu

Abstract: The theory of dynamic systems is usually used to model the real systems. The models are based on solving ordinary differential equations, partial or difference, which enable obtaining the relation between input signal and the system response (output signal). The analogy between those models and generalized dynamic systems or control systems can be practically used. Vibration propagation can be described in a similar way as the phenomena of vibrations of the electrical, mechanical, or hydraulic systems, diffusion, heat propagation, wave propagation or advection. The physical problem will be solved based on generalized dynamic systems, which enables drawing corresponding conclusions. This concept will be applied to qualitative analysis of vibration propagation in the foundations of transportation constructions".

Keywords: Analog modeling; Vibrations; Vibration propagation; Construction stability

Ogólnie drgania możemy podzielić na generowane:

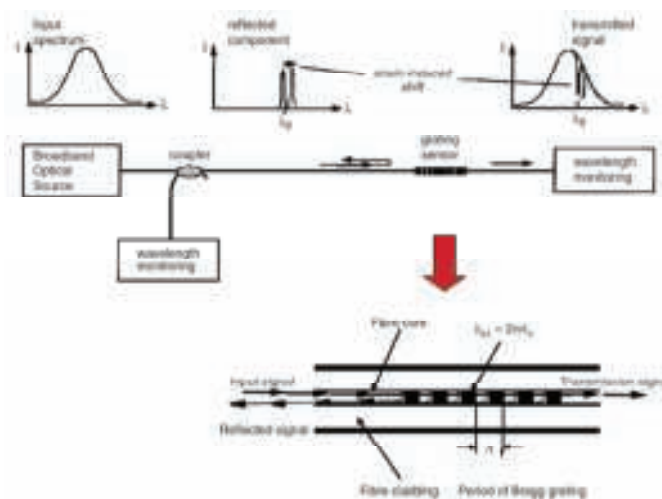
- celowo (o stosunkowo krótkim czasie trwania),
- niecelowo (o dłuższych, bądź o długich czasach trwania).

Te pierwsze o charakterystycznych parametrach są generowane w ramach eksperymentów czynnych. Mogą to być generowane z wykorzystaniem wzbudnika pobudzanego impulsem o wysokiej częstotliwości drgania sprężyste (fale sprężyste) rejestrowane z wykorzystaniem np. czujników światłowodowych, które są, co istotne niewrażliwe na wpływ pola elektromagnetycznego. Można wykorzystać je również do pomiaru innych parametrów fizycznych takich jak odkształcenia, temperatura, ciśnienie, itp., a tym samym do badania różnego rodzaju konstrukcji: budynków, mostów, rurociągów, a także pojazdów (lokomoty-

tyw, wagonów, statków, samolotów) lub ich elementów [7].

Najczęściej stosowane są czujniki typu FBG, których zasada działania jest przedstawiona na rys. 1. Są one w rzeczywistości filtrami widmowymi wykorzystującymi zasadę odbicia Bragg-

g'a i służą do wykrywania i lokalizacji uszkodzeń. Zmiany długości fali po propagacji przez obszar z uszkodzeniem lub po odbiciu jej od uszkodzenia mogą być wykrywane przez dekodery, który wykorzystuje filtry zaporowe (odcinające), nastawialne filtry wąsko-



1. Zasada działania czujnika FBG [2]

pasmowe. Według podobnej zasady bada się podłoże gruntowe pod inwestycje transportowe (drogi, tunele) w celu ustalenia układu warstw geologicznych. W tym przypadku drgania wzbudzone są za pomocą specjalnych pojazdów wibrujących (z płytami wibrującymi) wytwarzających drgania o częstotliwości 8 – 90 Hz przez 10 – 16 s powtarzane w danym punkcie przez około 5 min. (drgania okresowe). Odbite fale drganiowe od poszczególnych warstw są rejestrowane przez geofony, według analogicznej zasady jak na rys. 1.

Te drugie na ogół są niepożądane, są efektem ubocznym innych działań (procesów) i mają negatywny wpływ na człowieka oraz środowisko. Są mierzone i wykorzystywane w eksperymencie biernym w celu ich rejestrowania, a dalej eliminowania z wykorzystaniem eliminatorów drgań (rys. 2), mechanicznych filtrów drgań oraz zmniejszenia ich negatywnych skutków oddziaływania na człowieka i środowisko. Wykorzystywane są też do monitorowania stanu technicznego konstrukcji w czasie jej bieżącej pracy (w czasie ruchu pociągu, ruchu transportowych jednostek pływających narażonych na długookresowe cykliczne obciążenia o dużych wartościach spowodowanych ciągłym działaniem fal, w czasie ruchu samolotów itp.).

Analityczne uwarunkowania problemu

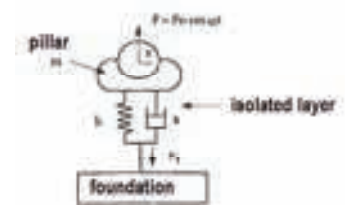
W praktyce inżynierskiej duże znaczenie mają zjawiska podobne prowadzące do modelowania analogowego. Bez pojęcia zjawisk podobnych, każde zjawisko należałoby badać oddzielnie, natomiast znając podobieństwo zjawisk można wykorzystać poszczególne wyniki badań do wyznaczania charakterystyk nowych urządzeń, czy procesów. Daje to możliwość wyciągania wniosków na podstawie działania jednego urządzenia co do zachowania się drugiego urządzenia, czy zachowania się danego procesu. Tak też postępuje się tworząc uogólnione układy dynamiczne [9], które ze względu na swoją ogólność obejmują swym zakresem układy ciągłe i dyskretne, o

parametrach skupionych i rozłożonych, stacjonarne i niestacjonarne, i które często modeluje się z wykorzystaniem równań różniczkowych zwyczajnych, cząstkowych, równań różnicowych, bądź ich układów. Jednym z celów tych działań jest poszukiwanie związku między sygnałem wejściowym i wyjściowym, tzn. odpowiedzią układu. Dopiero przyjęcie konkretnej reprezentacji układu prowadzi do szczegółowej analizy konkretnego problemu i zjawiska, pozwala ustalić pewne związki między elementami danego systemu, a także wskazać kierunki postępowania prowadzące do jego ulepszenia (poprawienia), sprawniejszego jego działania w celu uzyskania oczekiwanych rezultatów, czy poprawienia niezawodności systemu jako całości, bądź jego części.

Doskonale wiemy, że zamiast analizy układów elektrycznych R, L, C (opór, samoindukcja, pojemność) znajdujących się pod działaniem siły elektromotorycznej E , możemy rozważyć układy mechaniczne złożone z masy m , sprężyny o współczynniku sztywności (sprężystości) k i oporze tarcia r (tłumieniu) znajdujące się pod działaniem siły zewnętrznej F . Jest to możliwe, bo przy następującej zależności

$$k \leftrightarrow \frac{1}{C} \quad r \leftrightarrow R \quad m \leftrightarrow L \quad (1)$$

modele mechaniczny i elektryczny są opisywane takimi samymi równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, czyli takimi samymi z formalnego punktu widzenia układami dynamicznymi [12]. Są to znane równania różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego [14]. Podobnie odnosi się to także do odpowiednich układów hydraulicznych. Są to tzw. modele analogowe. Takie podejście pozwala np. modelować drgania mechaniczne lub przepływ wody przez przebiegi prądu I w odpowiednim układzie elektrycznym i odwrotnie. Są to typowe układy drgające i są też wykorzystywane do modelowania (konstruowania) wibroizolacji (rys. 2), np. w celu eliminowania drgań przekazywanych z silnika na lokomotywę, z lokomotywy na wagony – zapewnią to, w przypadku pasażerów lepszy komfort ich jazdy, a także poprawia



2. Eliminowanie drgań z wykorzystaniem warstwy izolującej drgania [10]

żywołność poszczególnych elementów systemu podtorze – tor – pojazd. Stan techniczny tego układu ma wpływ na dynamiczne zachowanie się pojazdu na torze, jego stateczność, a tym samym bezpieczeństwo i poziom drgań przekazywanych z pojazdu w tor i dalej, poprzez grunt w otaczające środowisko.

Wykorzystując uogólniony operator Heaviside'a [9] postaci

$$p_q = \frac{id}{\int_0^t} \quad (2)$$

oraz zależność

$$\frac{d^n}{dt^n} = p_q^n, \quad (3)$$

w przypadku jednorodnych warunków początkowych modelowi różniczkowemu obwodu R, L, C można zgodnie z [9] przyporządkować związek między odpowiedzią układu i jego wymuszeniem (sterowaniem) z wykorzystaniem uogólnionej transmitancji operatorowej $G(p_q)$, która w tym przypadku określona jest wzorem

$$G(p_q) = \frac{p_q}{Lp_q^2 + Rp_q + \frac{1}{C}} = \frac{1}{Lp_q + R + \frac{1}{Cp_q}},$$

ponieważ

$$(Lp_q^2 + Rp_q + \frac{1}{C})I = p_q E.$$

Funkcja operatorowa określona tutaj wzorem

$$Z(p_q) = \frac{1}{G(p_q)} = Lp_q + R + \frac{1}{Cp_q}$$

jest impedancją układu R, L, C . Ze względu na zależność (1) przez analogię pojęcie to przenosi się na drgające układy mechaniczne m, k, r i jest impedancją mechaniczną postaci

$$Z(p_q) = mp_q + r + \frac{k}{p_q}$$

w odniesieniu do prędkości przemieszczenia albo postaci

$$Z(p_q) = mp_q^2 + rp_q + k$$

w odniesieniu do przemieszczenia, i

jest uogólnieniem współczynnika siły sprężystości.

Te podstawowe modele mają bardzo istotne znaczenie praktyczne, ponieważ wiele złożonych modeli opisujących drgania w rzeczywistych układach transportowych powstaje z tych podstawowych analogowych (jak w (1)) poprzez ich łączenie równoległe bądź szeregowo.

Istotnym czynnikiem wpływającym na minimalizację poziomu drgań mechanicznych przenoszonych z lokomotywy na wagony jest odpowiednie ich ograniczanie lub eliminowanie w określonych zakresach częstotliwości poprzez urządzenia ciąglowo – zderzne, które grają rolę eliminatorów drgań (rys. 2) lub filtrów mechanicznych. Urządzenia te są modelowane przez analogiczne filtry elektryczne: dolnoprzepustowe, górnoprzepustowe, środkowoprzepustowe, środkowozaporowe, czyli układy R, L, C .

Zlinearyzowany układ ruchu pojazdu, traktowany jako uogólniony układ dynamiczny [9], w którym jako sygnał wejściowy przyjęto przyspieszenia środków kół zestawów kołowych, jako efekt wymuszeń kinematycznych kół od nierówności toru jest postaci

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}'$$

gdzie: \mathbf{x} oznacza wektor stanu, \mathbf{A} jest macierzą procesu albo inaczej stanu układu zawierającą bezwładności, tłumienia i sztywności, \mathbf{u} jest wektorem wymuszeń, \mathbf{B} jest macierzą wymuszenia.

Na podstawie (2) i (3) oraz na podstawie definicji uogólnionej transmitancji operatorowej [3] mamy

$$\mathbf{G}(p_q) = (p_q \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B},$$

czyli macierz transmitancji operatorowych, z której otrzymujemy macierz transmitancji widmowych postaci

$$\mathbf{G}(i\omega) = (i\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}, i^2 = -1,$$

która jest tu charakterystyką filtracji drgań. Częstotliwości wymuszeń od układu przenoszenia napędu i od nierówności toru przy odpowiednich prędkościach jazdy mogą powodować wzmacnianie amplitud drgań dla częstotliwości bliskich częstotliwościom własnym układu i w

konsekwencji transmitować drgania poprzez mechanizm ciąglowy np. z lokomotywy na wagony. Z podobną sytuacją mamy do czynienia w przypadku hamowania pociągu, z wykorzystaniem wybranego trybu hamowania [11] uzależnionego od rodzaju pociągu prowadzonego przez lokomotywę. Chodzi o wybór takiego trybu hamowania, aby zostały zmniejszone powstające w procesie hamowania drgania podłużne i poprzeczne całego składu pociągu prowadzące w skrajnych przypadkach do rozerwania składu. W przypadku lokomotyw elektrycznych zasilanych z sieci trakcyjnej istotne znaczenie ma współpraca tzw. odbieraka (rys. 3) z siecią trakcyjną (z siecią jezdnią). Jednym z takich modeli (bez tarcia suchego) jest model złożony z połączonych dwóch mas: zastępczej masy m_1 sieci jezdnej oraz zastępczej masy m_2 odbieraka, tłumienia r odbieraka, sztywności k sieci jezdnej poddanych działaniom sił: siły mechanicznej F_1 unoszenia oraz siły aerodynamicznej F_2 [8]. W związku z tym, że mamy tu do czynienia z układem drgającym typu R, L, C , więc na podstawie analogii (1) otrzymamy równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu postaci

$$(m_1 + m_2)\ddot{y} + r\dot{y} + ky = F_1 + F_2$$

opisujące drgania układu mas odbieraka – sieć trakcyjna. Układowi temu można, jak wcześniej wspomniano przyporządkować transmitancję operatorową i impedancje mechaniczne [5].

Drgania generowane przez urządzenia transportowe lądowe (pojazdy, rurociągi, tunele, mosty, płyty lotnisk itp.) przenoszone są na inne obiekty bezpośrednio lub pośrednio przez grunt, nawet na bardzo duże odległości, wywołując negatywne skutki. Najlepszym przykładem przenoszenia przez grunt drgań na duże odległości jest następujący przypadek. W końcu maja 2017 roku w Koszalinie na jednym z osiedli mieszkańcy kilku wieżowców odczuwali drgania w swoich mieszkaniach. Ewakuowano około tysiąc osób. Badania z wykorzystaniem sejsmografów i przeprowadzone eksperymenty (seria testowych mikro-wybuchów) potwierdziły przypusz-

czenie, że przyczyną tej sytuacji była stosowana na budowie drogi ekspresowej S6 metoda wybuchów wzmacniania podłoża gruntowego w okolicy miejscowości Sianów. Warto dodać, że wspomniana metoda była realizowana w miejscu odległym o około trzy kilometry od budynków, w których obserwowano jej negatywne skutki. Z tego wynika jak istotny jest z praktycznego punktu widzenia problem rozchodzenia się drgań w gruncie i ich ograniczanie lub eliminowanie. Analizując równania konstytutywne bazujące na równaniach Naviera uzupełnionych o człony odpowiadające za siły bezwładności dla półprzestrzeni sprężystej gruntu [6, 13] otrzymujemy równania różniczkowe falowe dla fal podłużnych i poprzecznych u . W każdym z tych przypadków są to równania różniczkowe cząstkowe [1] o tej samej strukturze i w przypadku jednowymiarowym można je przedstawić w postaci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4)$$

gdzie dodatni parametr a charakteryzuje półprzestrzeń w odniesieniu do analizowanego rodzaju fali drganiowej (podłużna, poprzeczna).

Szukamy odpowiedzi układu dynamicznego o parametrach rozłożonych (4) w zbiorze $D = \{(x, t) : x \in R, t > 0\}$ przy warunkach początkowych:

$$u(x, 0) = \phi(x)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x)$$

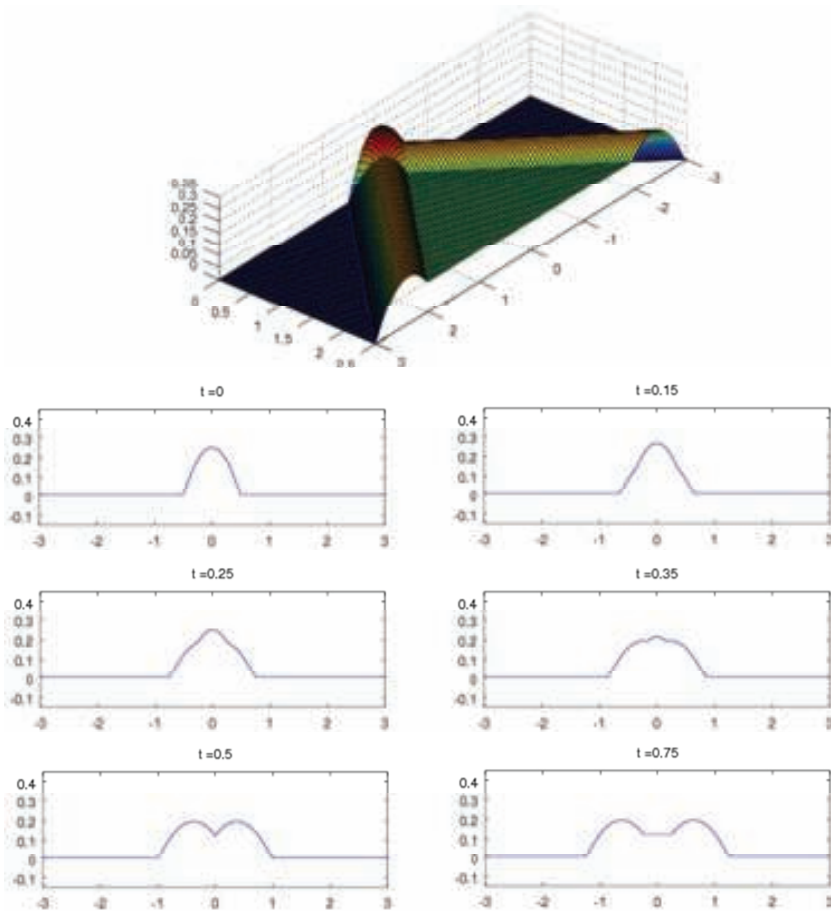
gdzie funkcje $\phi(x)$, $\psi(x)$ są funkcjami o ciągłych pochodnych odpowiednio rzędu drugiego i pierwszego na prostej R [4]. Do układu dynamicznego (4) możemy dołączyć funkcję $f(x, t)$ charakteryzującą źródło generowania drgań tworząc równanie różniczkowe niejednorodne. Korzystając z [9] jego rozwiązanie łatwo przedstawić w na-



3. Odbierak prądu z sieci trakcyjnej (fot. Mario Schürholz www.bahnbilder.de)

Materiały źródłowe

- [1] Bicadze A. W., Równania fizyki matematycznej, PWN, 1984
- [2] Chan T.H.T., Yu L., Tam H.Y., Ni Y.Q., Liu S.Y., Chung W.H., Cheng L.K., Fiber Bragg grating sensors for structural health monitoring of Tsing Ma bridge, Background and experimental observation, Engineering Structures, 28, 2006
- [3] Edwards R., Functional analysis. Theory and applications, New York, 1965
- [4] Evans L. C., Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998
- [5] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M., Feynmana wykłady z fizyki, PWN, 2001
- [6] Gryczmański M., Wprowadzenie do opisu sprężysto – plastycznych modeli gruntów, Wydawnictwo PAN, Studia z zakresu inżynierii nr 40, Warszawa 1995
- [7] Hong-Nan Li, Dong-Sheng Li, Gang-Bing Song, Recent applications of fiber optic sensors to health monitoring in civil engineering, Engineering Structures, 26, 2004
- [8] Judek S., Karwowski K., Mizan M., Wilk A., Modelowanie współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną, Przegląd Elektrotechniczny, 11, 2015, 248 – 253
- [9] Mieloszyk E., Nieliniowy rachunek operatorów w zastosowaniu do uogólnionych układów dynamicznych. Wydawnictwo PAN, Gdańsk 2008
- [10] Milewska A., A certain solution of non-linear differential problem with application to selected geotechnical problems, Archives of Civil Engineering, LVIII, 2.
- [11] Simens A. G., Instrukcja obsługi czterosystemowej lokomotywy wysokiej mocy serii 189.
- [12] Tihonow A. N., Samarski A. A., Równania fizyki matematycznej, PWN, 1963
- [13] Verruijt A., An Introduction to Soil Dynamics, Springer, 2010
- [14] Zwillinger D., Handbook of Differential Equations, Academic Press, 1984



4. Rozchodzenie się drgań przy zadanym $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ dla $a=1$ oraz ich kształt dla ustalonych chwil t

stępującej postaci operatorowej

$$u(x, t) = \frac{p_q^2 \varphi + p_q \psi}{p_q^2 - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}} + \frac{f}{p_q^2 - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \quad (5)$$

Analiza wzoru (5) pokazuje, że dla modelu jednowymiarowego drgania rozchodzą się w kierunku prostych $x+at=0$ i $x-at=0$ z prędkością a w „prawo” i w „lewo”. Widać to wyraźnie na rys. 4, gdzie dla uproszczenia przyjęto $a=1$ i $\varphi(x)=1/4-x^2$ dla $|x|<1/2$ dla oraz 0 dla pozostałych x , $\psi(x)$ jest sygnałem impulsowym prostokątnym o wysokości $1/4$ określonym w przedziale $\langle -1/2, 1/2 \rangle$, $f(x,t)=0$.

Do modelowania zachowania się (rozchodzenia się) drgań przewodu jezdnego [8] przez analogię, podobnie jak poprzednio wykorzystuje się układ dynamiczny (4), w którym $a^2=F_\sigma/\rho$, gdzie F_σ jest siłą naciągu sieci (około 10 kN), natomiast ρ jest gęstością liniową sieci zależną od materiału przewodu jezdnego. Są to drgania $u(x,t)$ w przewodzie jezdnym w jednowymiarowym modelu rozchodzącego się z prędkością $a=\sqrt{F_\sigma/\rho}$ (rys. 4).

Wspomniane równanie (4) może być rozszerzone o oddziaływanie odbieraka i wtedy, jak poprzednio pojawi się człon $f(x,t)$ prowadzący do układu nieswobodnego.

Podsumowanie

Wiele istotnych modeli wykorzystywanych w praktyce warto tworzyć bazując na analogii między opisywanymi zjawiskami. Modele układów złożonych tworzy się przez łańcuchowe lub równoległe połączenie podstawowych układów. Dzięki analogiom pojęcia funkcjonujące w jednej dziedzinie wiedzy mogą być przenoszone do innej z dobrym skutkiem. Modelowanie analogowe dobrze sprawdza się w praktyce, szczególnie do analizy jakościowej drgań badanych problemów inżynierskich. Modele analogowe pozwalają na podstawie jednego, rozstrzygać przykładowo o stateczności technicznej drugiego i odwrotnie. Poprzez identyfikację modelu można przejść do analizy ilościowej badanych problemów. ◀