

Dyskretno-ciągły model obliczeniowy sprzężonego układu dynamicznego: pantograf – napowietrzna sieć trakcyjna

Discrete-continuous computational model of the coupled system: pantograph – overhead contact line



Danuta Bryja

dr hab. inż. prof. nadzw. PWR.

Katedra Mostów i Kolei, Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Politechnika Wroclawska

danuta.bryja@pwr.edu.pl



Dawid Prokopowicz

mgr inż.

Zakład Wytrzymałości Materiałów, Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Politechnika Wroclawska

dawid.prokopowicz@pwr.edu.pl

Streszczenie: W pracy przedstawiono model obliczeniowy układu dynamicznego pantograf – sieć trakcyjna, w którym wykorzystano teorię drgań cięgna wiotkiego i metodę aproksymacyjną Lagrange’a – Ritza do wyprowadzenia równań ruchu sieci jezdnej obciążonej przemieszczającymi się pantografami. Modelem pantografu jest dyskretny układ dynamiczny o dwóch stopniach swobody, określających ruch dwóch mas zastępujących ślizgacz odbiorczy i ramę przegubową. System nośny sieci jezdnej potraktowano jako płaski układ cięgnowy o ciągłym rozkładzie masy, składający się z wieloprzęsłowego cięgna o trasie krzywoliniowej (lina nośna) i cięgna prostoliniowego (przewód jezdny), połączonego z cięgnem za pośrednictwem odkształcalnych wieszaków. Zasadniczym celem pracy jest prezentacja głównych idei modelu obliczeniowego, ze szczególnym uwzględnieniem wyprowadzenia równań dynamiki wstępnie napiętego, wieloprzęsłowego cięgna o niepomijalnym zwisie statycznym. Wiele uwagi poświęcono opisowi wzajemnych oddziaływań między pantografem i siecią jezdnią. Opracowany model obliczeniowy umożliwia symulację komputerową drgań sieci trakcyjnej wymuszonych ruchem dwóch pantografów oraz symulację dynamicznych zmian sił nacisku stykowego.

Słowa kluczowe: Sieć trakcyjna; Pantograf; Model obliczeniowy; Dynamika; Konstrukcje cięgnowe; Ruchome obciążenie inercyjne

Abstract: The paper presents the computational model of the pantograph – overhead contact line dynamic system, which uses the theory of cable vibrations and Lagrange – Ritz approximation method to derive equations of motion of the overhead contact line subjected to moving pantographs. The pantograph is modeled as a dynamic system of two degrees of freedom describing the motion of two masses replacing a collector head and an articulating frame. The overhead contact line is defined as a catenary system with continuously distributed mass. It consists of a multi-span cable characterized by a curvilinear route (catenary wire) and a straight cable (contact wire) connected with a catenary wire by elastic droppers. The main objective of the paper is to present principal ideas of the computational model, with a particular emphasis on formulating the equation of motion of a pre-tensioned multi-span cable with non-negligible static sag. Much attention is paid to the description of dynamic interaction between the pantograph and overhead contact line. The model allows computer simulation of catenary vibrations induced by two pantographs passing over the contact line, as well as a simulation of dynamic increments of the contact force.

Keywords: Overhead contact line; Pantograph; Computational model; Dynamics; Cable structures; Inertial moving loads

W związku z wymogami zawartymi w technicznych specyfikacjach interoperacyjności (TSI) podsystemu „Energia” systemu kolei w Unii Europejskiej, wprowadzonych Rozporządzeniem Komisji (UE) z 2014 roku [1], dużego znaczenia nabierają badania teoretyczne dynamicznego oddziaływania między pantografem i napowietrzną siecią trakcyjną. Sieć trakcyjna jest jednym ze składników

interoperacyjności systemu kolei i jako taka podlega ocenie zgodności. Według punktu 6.1.4 Załącznika do wspomnianego Rozporządzenia, konstrukcję sieci trakcyjnej należy oceniać między innymi na podstawie numerycznych symulacji drgań sieci spowodowanych ruchem pantografów zamontowanych na pojazdach kolejowych, za pomocą odpowiedniego narzędzia oblicze-

niowego. Szczegółowe wymagania dotyczące narzędzia obliczeniowego (metody symulacji) są określone w normie PN-EN 50318:2003 [2]. Zgodnie z tymi wymaganiami, metoda symulacji musi uwzględniać interakcję dynamiczną między pantografem i systemem nośnym górnej sieci jezdnej. Symulacje powinny obejmować przebiegi zmian sił nacisku stykowego pantografów,

przebiegi drgań górnej sieci jezdnej w wybranych punktach analizowanego odcinka sieci i historię drgań głównych elementów pantografu podczas jego przejeżdżania wzdłuż przewodu jezdnej. Wyznaczone na podstawie symulacji charakterystyki dynamiczne układu sieci trakcyjna – pantograf poddaje się analizie w celu zbadania, czy mieszczą się w zakresie określonym szczegółowymi przepisami, zapewniającym właściwą jakość odbioru prądu.

Opracowanie skutecznego i poprawnego narzędzia obliczeniowego służącego do opisanych symulacji numerycznych nie jest zagadnieniem łatwym od strony teoretycznej. Wynika to głównie ze specyfiki mechanicznej pracy konstrukcji ciągnowych, do których należy zaliczyć system nośny górnej sieci trakcyjnej [3]. Zasadniczą trudność stanowi jednak teoretyczne rozwiązanie problemu drgań złożonej konstrukcji ciągnowej obciążonej ruchem pantografów, czyli poddanej działaniu ruchomego obciążenia inercyjnego o własnych stopniach swobody. Temat ten jest podejmowany w ostatnich latach w literaturze polskiej, jednak prezentowane w publikacjach modele obliczeniowe są na ogół mocno uproszczone z punktu widzenia dokładności modelowania sieci trakcyjnej. Przykładowo, w pracy [4] autorzy potraktowali system nośny sieci jezdnej jako układ o jednym dynamicznym stopniu swobody o zmiennych parametrach aproksymowanych harmonicznymi funkcjami czasu. Podobne podejście zastosowali autorzy pracy [5], operując zredukowaną masą i sztywnością sieci jezdnej, jako parametrami zmiennymi w obszarze przęsła, a także autorzy pracy [6]. Dokładniejszy, ale daleko odbiegający od warunków rzeczywistych model sieci jezdnej zastosowano w pracy [7], gdzie przewód jezdny mode-

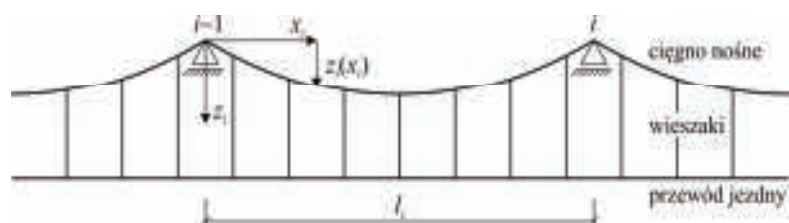
lowano metodą elementów skończonych przy użyciu elementów belkowych – a więc z uwzględnieniem zginania, którego wpływ jest pomijalny w przypadku wiotkiego przewodu.

We wszystkich wymienionych publikacjach wiele uwagi poświęcono problemowi modelowania pantografu, co w pewnym stopniu uzasadnia znaczne uproszczenia modelu sieci trakcyjnej. W niniejszej pracy zaproponowano zdecydowanie inny, bardziej „zrównoważony” model obliczeniowy układu sieci trakcyjna – pantograf, w którym nacisk jest położony na właściwe modelowanie sieci trakcyjnej i interakcji dynamicznej pantografów z siecią jezdnią. Pantograf jest modelowany jako dyskretny układ dynamiczny o dwóch stopniach swobody, które określają ruch dwóch zastępujących ślizgacz odbiorczy i ramę przegubową. System nośny sieci jezdnej potraktowano jako płaski układ ciągnowy o ciągłym rozkładzie masy, składający się z wieloprzęsłowego ciągnia wiotkiego o trasie krzywoliniowej (lina nośna) i połączonego z nim za pośrednictwem odkształcalnych wieszaków ciągnia o trasie prostoliniowej (przewód jezdny). Zasadniczym celem pracy jest prezentacja głównych idei modelu obliczeniowego, ze szczególnym uwzględnieniem wyprowadzenia równań dynamiki wieloprzęsłowego ciągnia wiotkiego o niepomijalnym zwisie statycznym. Testy numeryczne i zastosowania modelu będą przedmiotem odrębnej publikacji.

Podstawowe założenia modelu obliczeniowego

Rozważany układ dynamiczny składa się z dwóch głównych podukładów: sieci jezdnej górnej typu łańcuchowego z jednym przewodem jezdny oraz jednego lub dwóch pantografów rozstawionych w odległości d i poruszających się z jednakową stałą prędkością u . System nośny sieci jezdnej stanowią wstępnie napięta lina nośna i przewód jezdny podwieszony do liny nośnej za pomocą wiotkich wieszaków typu przewodowego. Model systemu nośnego obejmuje jedną sekcję sieci jezdnej, składającą się z kilku odcinków. Schemat przykładowego odcinka (przęsła) sieci pokazano na rysunku 1. Model sieci jest płaski, liniowy w sensie geometrycznym i fizycznym. Jest przeznaczony do analizy pionowych drgań przewodu jezdnej i liny nośnej oraz ślizgacza pantografu, a także przebiegu zmian w czasie siły nacisku stykowego. Uwzględnia siły interakcji między podukładami, wpływ zwisu liny nośnej na jej reakcje sprężyste oraz ciągły rozkład masy liny i przewodu jezdnej.

Przyjęto, że lina nośna jest wieloprzęsłowa, oparta przesuwnie na podporach pionowo nieodkształcalnych, położonych na tym samym poziomie. Liczba przęseł liny nośnej jest dowolna i wynosi n , trasa liny w stanie nieobciążonym jest paraboliczna w obrębie każdego przęsła, punkty podparcia napiętej liny na skrajnych podporach sekcji są punktami stałymi. Modelem mechanicznym liny nośnej jest liniowo-sprężyste ciągnio wiotkie o



1. Schemat wybranego odcinka górnej sieci jezdnej



2. Model dynamiczny pantografu

sztywności osiowej $E_c A_c$ i masie jednostkowej $m_c = \rho_c A_c$, gdzie ρ_c jest gęstością objętościową materiału liny, A_c polem przekroju, a E_c modułem Younga. Wstępny poziomy naciąg wieloprzęsłowego cięgna jest znany i wynosi H_0 . Modelem przewodu jezdny jest pozioma struna o sztywności $E_p A_p$ i masie jednostkowej m_p , wstępnie napięta siłą stałą S . Struna jest podwieszona wieszakami do liny nośnej i podparta nieprzesuwnie w punktach końcowych sekcji.

Wiotkie wieszaki łączące przewód jezdny z liną nośną są traktowane jako odkształcalne elementy bezmasowe, które nie przenoszą ściskania, natomiast przy rozciąganiu zachowują się jak więzi liniowo-sprężyste. Są to zatem elementy sprężyste typu „wież ze stopem” [8], które charakteryzuje różna sztywność, zależna od zakresu wartości względnego przemieszczenia końców więzi. Przyjęto, że sztywność więzi modelujących wieszaki sieci jezdnej jest równa zero przy ścisaniu a przy rozciąganiu wynosi k_{ij} , gdzie indeksem $i = 1, 2, \dots, n$ oznaczono numer przęsła sieci, a indeksem $j = 1, 2, \dots, h_i$ numer wieszaka w przęsle i . W praktyce, odcinki sieci

trakcyjnej są na ogół powtarzalne w obrębie sekcji – to znaczy, że długość przęsła l_i jest jednakowa, podobnie jak liczba wieszaków h_i w przęsłach i sztywność wieszaków k_{ij} . Parametry te przyjęto za zmienne, aby zachować ogólność modelu.

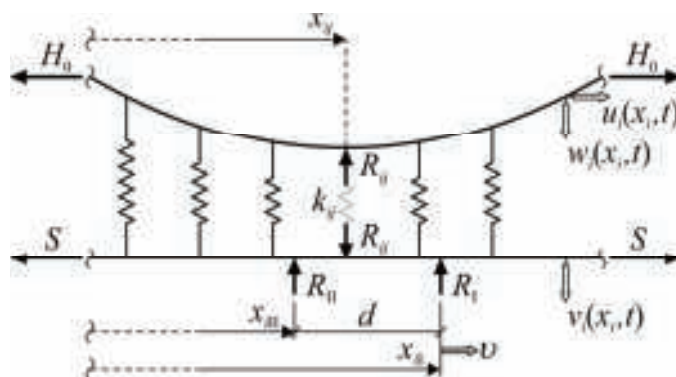
Zgodnie z wytycznymi Załącznika A Normy Europejskiej EN 50318 [2], model pantografu przyjęto w postaci dyskretnego układu dynamicznego o dwóch stopniach swobody, którego schemat przedstawia rysunek 2. Układ składa się z dwóch mas reprezentujących ślizgacz odbiorczy i ramę przegubową pantografu, które są połączone ze sobą i z konstrukcją wsporczą (pojazdem) układem więzi sprężystych i tłumików wiskotycznych. Dodatkowo wprowadzono tzw. sprężynę kontaktową między ślizgaczem odbiorczym i punktem styku nakładki stykowej z przewodem jezdny. Sprężyna kontaktowa nie jest częścią pantografu, ale jej zastosowanie ułatwia obliczenie siły nacisku stykowego w warunkach dynamicznych i jest dopuszczane przez normę EN 50318. Siła nacisku stykowego oznaczona na rysunku 2 symbolem R_j jest zmienną w czasie reakcją więzi kontaktowej $R_j(t)$, indeks $J = I, II$ oznacza numer pantografu. Reakcja $R_j(t)$ obejmuje zarówno statyczną siłę nacisku stykowego jak i dynamiczne zmiany tej siły spowodowane drganiami wzbudzonymi przejazdem pantografu. Siła nacisku statycznego wynika z działania urzą-

dzenia podnoszącego pantograf i jest skierowana w górę, przenosi zatem ciężar pantografu. Zależnie od konstrukcji pantografu, siła stała unosząca pantograf może być przyłożona do masy m_2 reprezentującej ramę przegubową lub do masy ślizgacza m_1 lub do obu tych mas. Siły F_1 i F_2 pokazane na rysunku 2 oznaczają odpowiednie wypadkowe sił unoszących i sił ciężkości odpowiednich części pantografu.

W dalszej części artykułu zostaną wyprowadzone w formie macierzowej równania ruchu następujących podukładów: cięgna nośnego, przewodu jezdny i pantografu, z uwzględnieniem sił interakcji między podukładami. Następnie będą wyznaczone w jawnej postaci siły interakcji i na tej podstawie zostanie sformułowany docelowy układ sprzężonych równań ruchu opisujących drgania rozważanej sekcji sieci jezdnej, wzbudzone jednoczesnym przejazdem dwóch pantografów.

Lina nośna

Na rysunku 3 przedstawiono wybrany odcinek górnej sieci jezdnej, oznaczony indeksem i . Więzy sprężyste (wieszaki) łączące przewód jezdny z liną nośną zastąpiono ich oddziaływaniami $R_{ij}(t)$, jak pokazano na rysunku na przykładzie wybranego wieszaka o sztywności k_{ij} , którego położenie w przęsle i określa współrzędna $x_i = x_{ij}$. W ten sposób lina nośna i przewód jezdny zostały



3. Przemieszczenia liny nośnej i przewodu jezdny oraz oddziaływania wieszaków

rozdzielone, co umożliwia wyrowadzenie równania ruchu liny, przy założeniu jej obciążenia skupionymi reakcjami więzi.

Jak wynika z rysunku 3, drgania cięгна nośnego są opisane dwiema funkcjami: $u_i(x_i, t)$ oraz $w_i(x_i, t)$. Pierwsza funkcja określa poziomą składową przemieszczenia, druga – składową pionową. Oba te przemieszczenia są mierzone od statycznie zrównoważonego stanu odniesienia, w którym cięugno jest wstępnie napięte poziomą siłą H_0 i obciążone rozłożonym ciężarem własnym oraz przekazywanym przez wieszaki ciężarem przewodu jezdneho i wieszaków. Trasę cięгна w stanie odniesienia opisuje funkcja $z_i(x_i)$ a jej pochodna $z_i' = dz_i/dx_i$ określa kąt nachylenia stycznej α_{0i} . Siła osiowa w przekroju x_i w stanie odniesienia wynosi $N_{0i}(x_i) = H_0 / \cos \alpha_{0i}$, co będzie wykazane dalej, przy czym $\cos \alpha_{0i} = (1 + z_i'^2)^{-1/2}$.

W warunkach dynamicznych trasa cięгна ulega deformacji wskutek obciążenia przejazdem pantografu a samo cięugno doznaje odkształceń podłużnych, które przy założeniu małych przemieszczeń są opisane wzorem ([3], [9])

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i(x_i, t) = (u_i' + z_i' w_i') \cos^2 \alpha_{0i} \quad (1)$$

Zgodnie z prawem Hooke'a, zmienne w czasie odkształcenia podłużne cięгна powodują zmiany siły osiowej w cięgnie. Dynamiczny przyrost siły osiowej spowodowany odkształceniem wynosi

$$\begin{aligned} \Delta N_i(x_i, t) &= E_c A_c \boldsymbol{\varepsilon}_i = \\ &= E_c A_c (u_i' + z_i' w_i') \cos^2 \alpha_{0i} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -[N_i \cos \alpha_{0i} (1 + u_i')] + (m_c / \cos \alpha_{0i}) \ddot{u}_i &= p_{xi} \\ -[N_i \cos \alpha_{0i} (z_i' + w_i')] + (m_c / \cos \alpha_{0i}) \ddot{w}_i &= p_{zi} + q \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(N_{0i} \cos \alpha_{0i})' &= 0 \rightarrow N_{0i} \cos \alpha_{0i} = \text{const} = H_0 \\ -(N_{0i} \cos \alpha_{0i} z_i')' &= q \rightarrow z_i'' = -q / H_0 \quad (5) \end{aligned}$$

Całkowita siła osiowa $N_i(x_i, t) = N_{0i}(x_i) + \Delta N_i(x_i, t)$ spełnia równania równowagi dynamicznej cięгна w konfiguracji odkształconej, które według [3], [9], [10] mają postać (3), gdzie $(\cdot)' = \partial/\partial x$, $(\cdot)'' = \partial^2/\partial t^2$, $q(x)$ jest rozłożonym, stałym obciążeniem cięгна. Obciążeniem wzbudzającym drgania liny nośnej są tylko pionowe reakcje wieszaków, zatem $p_{xi} = 0$ oraz

$$p_{zi}(x_i, t) = -\sum_{j=1}^{n_i} R_{ij}(t) \delta(x_i - x_{ij}) \quad (4)$$

gdzie symbol $\delta(\cdot)$ oznacza funkcję delta Diraca. Siły oporów ruchu powodujące tłumienie drgań cięгна będą uwzględnione po dyskretyzacji układu.

W stanie odniesienia mamy $p_{zi} = 0$, $u_i = 0$ i $w_i = 0$, zatem $\Delta N_i(x_i, t) = 0$. Uwzględniając te zależności w równaniach (3) otrzymuje się równania statycznie zrównoważonej konfiguracji odniesienia, z których wynika, że (5). Jeśli oznaczymy przez m uśrednioną, równomiernie rozłożoną na długości przęsła masę liny nośnej, wieszaków i przewodu jezdneho, to $q = mg$ i trasa liny nośnej jest paraboliczna, jak przyjęto w założeniach modelu. Otrzymujemy wtedy: $z_i = 4f_i (\xi_i - \xi_i^2)$, gdzie strzałka zwisu liny wynosi $f_i = mgl_i^2/8H_0$ oraz $\xi_i = x_i/l_i$.

Po uwzględnieniu zależności (5) i przyjęciu, że $m_c/\cos \alpha_{0i} \approx m_c$, gdy zwis cięгна jest mały, równania (3) można zapisać w postaci (6), gdzie $\Delta H_i = \Delta N_i \cos \alpha_{0i}$ przy czym za ΔN_i należy podstawić wzór (2). Równania (6) są warunkami równowagi sił działających na cięugno podczas drgań (przy pominięciu tłumienia) – składniki z lewej strony równań są nieliniowymi reakcjami spręży-

stymi cięгна, po prawej stronie zgrupowano siły bezwładności i obciążenie dynamiczne. Fakt ten wykorzystano do wyznaczenia formuł bilansu energetycznego wieloprzęsłowej liny nośnej. W obliczeniach pominięto nieliniowe składniki reakcji sprężystych cięгна: $(\Delta H_i u_i)'$ i $(\Delta H_i w_i)'$ oraz uwzględniono warunki brzegowe i warunki równowagi sił na podporach pośrednich. Następnie zastosowano metodę Lagrange'a – Ritza [11] w celu wyrowadzenia macierzowego równania ruchu określonego w dziedzinie czasu. Szczegóły wyrowadzenia można odtworzyć bazując na procedurze przedstawionej w artykule [10], którego przedmiotem są drgania wieloprzęsłowego cięгна nośnego kolei linowej.

Ogólna postać macierzowego równania ruchu wieloprzęsłowej liny nośnej górnej sieci jezdneho pantografu jest następująca:

$$\mathbf{B}_{cc} \ddot{\mathbf{q}}_c(t) + \mathbf{C}_{cc} \dot{\mathbf{q}}_c(t) + \mathbf{K}_{cc} \mathbf{q}_c(t) = \mathbf{f}_c(t) \quad (7)$$

Równanie (7) ma strukturę blokową, wynikającą z budowy wektora współrzędnych uogólnionych: $\mathbf{q}_c = \text{col}(\mathbf{q}_{w1}, \mathbf{q}_{u1}, \dots, \mathbf{q}_{wn}, \mathbf{q}_{un}, \mathbf{r}_c)$, który składa się z wektorów współrzędnych przyjętej aproksymacji stanu przemieszczenia liny, kinematycznie dopuszczalnej, określonej wzorami (8), gdzie $\mathbf{s}_i^T(x_i) = [\sin \pi \xi_i, \sin 2\pi \xi_i, \dots, \sin n\pi \xi_i]$ jest wektorem funkcji aproksymacyjnych, $\xi_i = x_i/l_i$, $i = 1, \dots, n$. Drugi wektor aproksymujący ma postać $\mathbf{f}_i^T(x_i) = [(0)_{1, \dots, (1-\xi_i)_{i-1}, (\xi_i)_{i, \dots, (0)_{n-1}}$ jeśli $i = 2, \dots, n-1$. W przypadku, gdy $i = 1$ oraz $i = n$ należy przyjąć odpowiednio: $\mathbf{f}_1^T = [(\xi_1)_{1, (0)_{2, \dots, (0)_{n-1}}$,

$$\begin{aligned} -[H_0 u_i'' + (\Delta H_i)' + (\Delta H_i u_i)'] &= -m_c \ddot{u}_i \\ -[H_0 w_i'' + (\Delta H_i z_i')' + (\Delta H_i w_i)'] &= -m_c \ddot{w}_i + p_{zi} \quad (6) \end{aligned}$$

$\mathbf{f}_n^T = [(0)_{1,\dots,(0)_{n-2}}, (1-\xi_n)_{n-1}]$, gdzie n jest liczbą przęseł sekcji sieci górnej. Współrzędne zgrupowane w wektorze \mathbf{r}_c są nieznanymi przesuwami liny na kolejnych podporach przesuwnych (wspornikach sieci), numerowanych od 1 do $n-1$. W równaniu (7) uwzględniono tłumienie przyjmując model Rayleigha, zgodnie z którym macierz tłumienia jest kombinacją macierzy sztywności i bezwładności: $\mathbf{C}_{cc} = \kappa_c \mathbf{K}_{cc} + \mu_c \mathbf{B}_{cc}$.

Przewód jezdny

Równania różniczkowe drgań przewodu jezdnego w przęśle „ i ” wynikają wprost z równań cięga (6), jeśli uwzględnimy, że naciąg wstępny wynosi S i trasa cięga jest idealnie prostoliniowa. Wówczas $z'_i = 0$, czyli $\cos\alpha_{0i} = 1$ i $\Delta H_i = \Delta N_i = E_p A_p U'_i$, gdzie $U_i(x_p, t)$ jest poziomym przemieszczeniem struny (przewodu jezdnego). Oznaczając przemieszczenie pionowe przez $v_i(x_p, t)$ otrzymamy na podstawie (6) równania o postaci (9). Pominięcie nieliniowych składników prowadzi do separacji równań (9), co oznacza, że w zagadnieniu liniowym można pominąć drgania osiowe w modelu obliczeniowym sieci jezdnej, gdyż są niezależne od drgań poprzecznych. Uwzględniając fakt, że przewód jezdny jest obciążony reakcjami wieszaków $R_{ij}(t)$ i ruchomymi siłami nacisku styko-

wego pantografów, $R_i(t)$ i $R_{II}(t)$, otrzymuje się na podstawie (9)₂ i rysunku 3 następujące równanie drgań poprzecznych przewodu (10). Sporządzenie bilansu energetycznego z uwzględnieniem warunków brzegowych i następnie zastosowanie metody Lagrange’a – Ritza prowadzi do równania ruchu

$$\mathbf{B}_{pp} \ddot{\mathbf{q}}_p(t) + \mathbf{C}_{pp} \dot{\mathbf{q}}_p(t) + \mathbf{K}_{pp} \mathbf{q}_p(t) = \mathbf{f}_p(t) \quad (11)$$

w którym $\mathbf{C}_{pp} = \kappa_p \mathbf{K}_{pp} + \mu_p \mathbf{B}_{pp}$, jak w przypadku liny nośnej. Wektor współrzędnych uogólnionych $\mathbf{q}_p = \text{col}(\mathbf{q}_{v1}, \dots, \mathbf{q}_{vn}, \mathbf{r}_p)$ ma ponownie budowę blokową – składa się z wektorów współrzędnych aproksymacji przemieszczeń poprzecznych, przyjętej w kolejnych przęsłach $i = 1, 2, \dots, n$ według wzoru

$$v_i(x_i, t) = \mathbf{s}_i^T(x_i) \mathbf{q}_{vi}(t) + \mathbf{f}_i^T(x_i) \mathbf{r}_p(t) \quad (12)$$

Ze względu na podobieństwo warunków brzegowych, aproksymacja przemieszczeń poprzecznych przewodu jezdnego (12) ma strukturę analogiczną do aproksymacji przemieszczeń poziomych liny nośnej (8)₂.

Pantograf

Rozważmy teraz model dynamiczny pantografu, który przedstawiono na rysunku 2. Występujący w opisach

rysunku indeks $J = I, II$ różnicuje dwa pantografy poruszające się wzdłuż przewodu jezdnego. Założono, że dane techniczne obu pantografów są jednakowe i przyjęto chwilowo, że analizowany pantograf o numerze J znajduje się w przęśle i . Przyjęto zgodnie ze stanem faktycznym, że pokazane na rysunku 2 przemieszczenia obu mas każdego pantografu, $q_{1J}(t)$ i $q_{2J}(t)$, są mierzone w stanie, gdy pantograf jest uniesiony, tzn. wszystkie jego więzi odkształcalne łącznie z więzią kontaktową doznały już wstępnych przemieszczeń spowodowanych stałymi siłami F_1 i F_2 . To oznacza, że łączna siła $F = F_1 + F_2$ będąca siłą nacisku statycznego działa bezpośrednio na przewód jezdny, zatem reakcja więzi kontaktowej wynosi $R_j = F + P_j(t)$, gdzie $P_j(t)$ jest dynamicznym przyrostem siły nacisku stykowego, spowodowanym względnym przemieszczeniem końców więzi kontaktowej. Na podstawie bilansu energii i równań Lagrange’a można łatwo wyprowadzić równania drgań pantografu w bazie trzech współrzędnych: $q_{1J}(t)$, $q_{2J}(t)$ i $V_J(t)$, które są kolejno: przemieszczeniami pionowymi mas m_1 i m_2 oraz przemieszczeniem pionowym punktu styku nakładki stykowej z przewodem jezdny. Równania te zapiszemy w następującej postaci blokowo-macie-

$$w_i(x_i, t) = \mathbf{s}_i^T(x_i) \mathbf{q}_{wi}(t) \quad (8)$$

$$u_i(x_i, t) = \mathbf{s}_i^T(x_i) \mathbf{q}_{ui}(t) + \mathbf{f}_i^T(x_i) \mathbf{r}_c(t)$$

$$-[S U_i'' + E_p A_p U_i'' + E_p A_p (U_i'^2)'] = -m_p \ddot{U}_i \quad (9)$$

$$-[S v_i'' + E_p A_p (U_i' v_i')'] = -m_p \ddot{v}_i + p_{zi}$$

$$-S v_i'' + m_p \ddot{v}_i = p_{zi}$$

$$p_{zi} = \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij}(t) \delta(x_i - x_{ij}) - \sum_{J=1}^{II} R_J(t) \delta(x_i - x_{iJ}) \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_J \\ \ddot{V}_J \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_J \\ \dot{V}_J \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_J & -k_c \mathbf{e} \\ -k_c \mathbf{e}^T & k_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_J \\ V_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ P_J \end{bmatrix} \quad (13)$$

rzowej (13), gdzie $\mathbf{q}_J = [q_{1J}, q_{2J}]^T$, $\mathbf{e} = [1, 0]^T$, $\mathbf{0} = [0, 0]^T$ oraz (14).

Blokowy zapis trzech równań w postaci macierzowej (13) umożliwia ich dekompozycję na dwa równania

$$\mathbf{B}_J \ddot{\mathbf{q}}_J(t) + \mathbf{C}_J \dot{\mathbf{q}}_J(t) + \mathbf{K}_J \mathbf{q}_J(t) = k_c \mathbf{e} V_J(t) \quad (15)$$

$$-k_c \mathbf{e}^T \mathbf{q}_J(t) + k_c V_J(t) = P_J(t) \quad (16)$$

z których pierwsze opisuje drgania pantografu sprzężone z drganiami sieci jezdnej poprzez składnik $k_c \mathbf{e} V_J(t)$, a drugie stanowi formułę umożliwiającą obliczenie siły interakcji dynamicznej między pantografem i siecią jezdnią.

Siła interakcji jest równocześnie dynamicznym przyrostem siły nacisku stykowego, który po rozwinięciu formuły (16) można zapisać w prostszej postaci: $P_J(t) = k_c V_J(t) - k_c q_{1J}(t)$. Jeśli pantograf znajduje się w chwili t w przęśle i , to przemieszczenie $V_J(t)$ punktu styku pantografu jest równe dynamicznemu ugięciu struny (przewodu jezdnego) w przekroju $x_i = x_{iJ}(t)$. Biorąc pod uwagę wzór (12) mamy zatem (17).

Aby uwzględnić w języku matematyki fakt, że w chwili t pantograf znajduje się w konkretnym prze-

śle i , wprowadzono następujące definicje funkcji aproksymacyjnych, śledzących położenie punktu stykowego (18).

Definicje (18) pozwalają zapisać tzw. przemieszczenie śledzące w następującej postaci

$$V_J(t) = \sum_{i=1}^n (\tilde{\mathbf{s}}_{iJ}^T \mathbf{q}_{vi} + \tilde{\mathbf{f}}_{iJ}^T \mathbf{r}_p) \quad (19)$$

Jeśli pantografy poruszają się wzdłuż przewodu jezdnego ze stałą jednakową prędkością u , to położenie punktu styku pierwszego pantografu, mierzone względem punktu początkowego analizowanej sekcji sieci jezdnej, jest określone funkcją $x_1 = ut$. Położenie punktu styku w przęśle i względem punktu $x_i = 0$ określa funkcja $x_{i1} = ut - L_{i-1}$, gdzie $L_{i-1} = l_1 + l_2 + \dots + l_{i-1}$, przy czym w pierwszym przęśle ($i = 1$) należy przyjąć $L_0 = 0$. W przypadku drugiego pantografu mamy $x_{i11} = x_{i1} - d$.

Drgania układu złożonego z dwóch pantografów (odbieraków) o numerach $J = I, II$ są opisane dwoma równaniami (15), które zapiszemy łącznie w następującej postaci macierzowej

$$\mathbf{B}_{oo} \ddot{\mathbf{q}}_o + \mathbf{C}_{oo} \dot{\mathbf{q}}_o + \mathbf{K}_{oo} \mathbf{q}_o = \mathbf{f}_o \quad (20)$$

gdzie $\mathbf{q}_o = \text{col}(\mathbf{q}_I, \mathbf{q}_{II})$ i $\mathbf{f}_o = \text{col}(\mathbf{f}_I, \mathbf{f}_{II})$ a

macierze układu \mathbf{B}_{oo} , \mathbf{C}_{oo} , \mathbf{K}_{oo} są blokowo-diagonalne, np. $\mathbf{B}_{oo} = \text{diag}(\mathbf{B}_I, \mathbf{B}_{II})$.

Siły interakcji i obciążenie podukładów

Po podstawieniu do prawej strony równań (15) wzoru (19) i po przekształceniach wykorzystujących rachunek macierzowy otrzymuje się formułę określającą wektor dynamicznych obciążeń pantografów

$$\mathbf{f}_o(t) = \tilde{\mathbf{K}}_{op}(t) \mathbf{q}_p(t) \quad (21)$$

Wektor (21) wyraża oddziaływanie drgającego przewodu jezdnego na pantografy poprzez sprzężoną kontaktową, zależy bowiem od współrzędnych uogólnionych $\mathbf{q}_p = \text{col}(\mathbf{q}_{v1}, \dots, \mathbf{q}_{vn}, \mathbf{r}_p)$, wynikających z aproksymacji drgań przewodu jezdnego przyjętej wzorem (12). Macierz definiującą wektor (21) oblicza się ze wzorów (22), gdzie (23) oraz $\{k_c\} = \text{diag}(k_c, k_c)$, i jak poprzednio: $\mathbf{e} = [1, 0]^T$, $\mathbf{0} = [0, 0]^T$.

Uwzględniając wzór (19) i strukturę wektora \mathbf{q}_p można zapisać w jawnej postaci łączne siły nacisku stykowego (16) – statyczne i dynamiczne, jako (24), gdzie $F = F_1 + F_2$. Siły $R_J(t)$, gdzie $J = I, II$, stanowią obciążenie przewodu jezd-

$$\mathbf{B}_J = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_J = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_J = \begin{bmatrix} k_1 + k_c & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$V_J(t) = v_i[x_{iJ}(t), t] = \mathbf{s}_i^T[x_{iJ}(t)] \mathbf{q}_{vi}(t) + \mathbf{f}_i^T[x_{iJ}(t)] \mathbf{r}_p(t) \quad (17)$$

$$\tilde{\mathbf{s}}_{iJ}(t) = \begin{cases} \mathbf{s}_i^T[x_{iJ}(t)], & \text{gdy } 0 < x_{iJ} \leq l_i \\ \mathbf{0}, & \text{gdy } x_{iJ} \leq 0 \text{ lub } x_{iJ} > l_i \end{cases}, \quad \tilde{\mathbf{f}}_{iJ}(t) = \begin{cases} \mathbf{f}_i^T[x_{iJ}(t)], & \text{gdy } 0 < x_{iJ} \leq l_i \\ \mathbf{0}, & \text{gdy } x_{iJ} \leq 0 \text{ lub } x_{iJ} > l_i \end{cases} \quad (18)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{op}(t) = [(\tilde{\mathbf{K}}_{op})_1 \quad \dots \quad (\tilde{\mathbf{K}}_{op})_n \quad (\tilde{\mathbf{K}}_{op})_r] \quad (22)$$

$$(\tilde{\mathbf{K}}_{op})_i = \mathbf{E}\{k_c\} \tilde{\mathbf{S}}_i^T, \quad (\tilde{\mathbf{K}}_{op})_r = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}\{k_c\} \tilde{\mathbf{F}}_i^T$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_i = [\tilde{\mathbf{s}}_{i1}(t) \quad \tilde{\mathbf{s}}_{i11}(t)], \quad \tilde{\mathbf{F}}_i = [\tilde{\mathbf{f}}_{i1}(t) \quad \tilde{\mathbf{f}}_{i11}(t)], \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e} \end{bmatrix} \quad (23)$$

nego, z którego wynika pierwszy składnik wektora obciążeń uogólnionych $\mathbf{f}_p = \tilde{\mathbf{f}}_p + \hat{\mathbf{f}}_p$ w równaniu ruchu (11). Drugi składnik jest wynikiem oddziaływań wieszaków łączących przewód jezdny z liną nośną, przy czym reakcja j -tego wieszaka o sztywności k_{ij} , znajdującego się w przęśle i , jest określona relacją (25), w której uwzględniono aproksymację stanu przemieszczenia systemu nośnego sieci jezdnej, przyjętą wzorami (8)₁ i (12), oraz wprowadzono oznaczenia: $\mathbf{s}_{ij} = \mathbf{s}_i(x_{ij})$, $\mathbf{f}_{ij} = \mathbf{f}_i(x_{ij})$.

Po podstawieniu sił interakcji (24) i (25) do wzoru (10)₂ i obliczeniu pracy obciążenia na przemieszczeniach przewodu jezdnego

$$L = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} v_i(x_i, t) p_{zi}(x_i, t) dx_i = \mathbf{q}_p^T \mathbf{f}_p \quad (26)$$

otrzymuje się wektor obciążeń uogólnionych, który można zapisać wzorem ogólnym (27), gdzie przykładowo:

$$\tilde{\mathbf{F}}_p(t) = \text{col}(\tilde{\mathbf{S}}_1 \mathbf{F}, \dots, \tilde{\mathbf{S}}_n \mathbf{F}, \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{F}}_i \mathbf{F}),$$

przy czym $\mathbf{F} = [F_1 + F_2, F_1 + F_2]^T$.

Podobnie wyznaczono wektor obciążeń uogólnionych \mathbf{f}_c występujący w równaniu ruchu liny nośnej (7), z tą różnicą, że lina nośna jest obciążona tylko reakcjami wieszaków (rysunek 3). Ogólną postać wektora określa wzór

$$\mathbf{f}_c(t) = -\hat{\mathbf{K}}_{cc} \mathbf{q}_c(t) + \hat{\mathbf{K}}_{cp} \mathbf{q}_p(t) \quad (28)$$

Równania ruchu układu sieć jezdna – pantografy

Równania ruchu trzech analizowanych podukładów: liny nośnej, przewodu jezdnego i dwóch pantografów tworzą razem dynamiczny model obliczeniowy górnej sieci jezdnej, wzdłuż której poruszają się ze stałą prędkością pantografy. Po uwzględnieniu wektorów obciążeń (21), (27) i (28) równania ruchu (7), (11) i (20) przyjmują postać (29), z której jasno wynika, że drgania podukładów są sprzężone. Sposób sprzężenia jest bardziej widoczny po przekształceniu równań (29) w jedno równanie macierzowe o strukturze blokowej. Przekształcenie

polega na wprowadzeniu łącznego wektora współrzędnych uogólnionych $\mathbf{q} = \text{col}(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_p, \mathbf{q}_o)$ i przeniesieniu na lewą stronę równań (29) wszystkich składników zależnych od współrzędnych uogólnionych oraz ich prędkości i przyspieszeń. W wyniku otrzymujemy równanie (30), które sprowadza się do powszechnie znanego układu liniowych równań ruchu, które zapisane w notacji macierzowej mają postać

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{q}(t) = \mathbf{f} \quad (31)$$

Warto zauważyć, że jest to układ równań ruchu o zmiennych współczynnikach, przy czym dzięki zastosowaniu więzi kontaktowej, współczynniki zależne od czasu są zgrupowane tylko w niektórych blokach macierzy sztywności – oznaczonych w (30) nadpisaną tyldą.

Podsumowanie

Zaproponowany model obliczeniowy górnej sieci jezdnej wraz z ruchomymi pantografami sprowa-

$$R_j(t) = F + P_j(t) = F + k_c \left[\tilde{\mathbf{s}}_{1j}^T, \dots, \tilde{\mathbf{s}}_{nj}^T, \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{f}}_{ij}^T \right] \mathbf{q}_p - k_c \mathbf{e}^T \mathbf{q}_j \quad (24)$$

$$R_{ij} = k_{ij} [w_i(x_{ij}) - v_i(x_{ij})] = k_{ij} (\mathbf{s}_{ij}^T \mathbf{q}_{wi} - \mathbf{s}_{ij}^T \mathbf{q}_{vi} - \mathbf{f}_{ij}^T \mathbf{r}_p) \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_p(t) &= \tilde{\mathbf{f}}_p(t) + \hat{\mathbf{f}}_p(t) = \\ \tilde{\mathbf{F}}_p(t) - \tilde{\mathbf{K}}_{pp}(t) \mathbf{q}_p(t) + \tilde{\mathbf{K}}_{po}(t) \mathbf{q}_o(t) - \hat{\mathbf{K}}_{pp} \mathbf{q}_p(t) + \hat{\mathbf{K}}_{pc} \mathbf{q}_c(t) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{cc} \ddot{\mathbf{q}}_c(t) + \mathbf{C}_{cc} \dot{\mathbf{q}}_c(t) + \mathbf{K}_{cc} \mathbf{q}_c(t) &= -\hat{\mathbf{K}}_{cc} \mathbf{q}_c(t) + \hat{\mathbf{K}}_{cp} \mathbf{q}_p(t) \\ \mathbf{B}_{pp} \ddot{\mathbf{q}}_p(t) + \mathbf{C}_{pp} \dot{\mathbf{q}}_p(t) + \mathbf{K}_{pp} \mathbf{q}_p(t) &= \end{aligned} \quad (29)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_p(t) - \tilde{\mathbf{K}}_{pp}(t) \mathbf{q}_p(t) + \tilde{\mathbf{K}}_{po}(t) \mathbf{q}_o(t) - \hat{\mathbf{K}}_{pp} \mathbf{q}_p(t) + \hat{\mathbf{K}}_{pc} \mathbf{q}_c(t)$$

$$\mathbf{B}_{oo} \ddot{\mathbf{q}}_o + \mathbf{C}_{oo} \dot{\mathbf{q}}_o + \mathbf{K}_{oo} \mathbf{q}_o = \tilde{\mathbf{K}}_{op}(t) \mathbf{q}_p(t)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{cc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{pp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_c \\ \ddot{\mathbf{q}}_p \\ \ddot{\mathbf{q}}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{cc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{pp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_c \\ \dot{\mathbf{q}}_p \\ \dot{\mathbf{q}}_o \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{cc} + \hat{\mathbf{K}}_{cc}) & -\hat{\mathbf{K}}_{cp} & \mathbf{0} \\ -\hat{\mathbf{K}}_{pc} & (\mathbf{K}_{pp} + \hat{\mathbf{K}}_{pp} + \tilde{\mathbf{K}}_{pp}) & -\tilde{\mathbf{K}}_{po} \\ \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{K}}_{op} & \mathbf{K}_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_c \\ \mathbf{q}_p \\ \mathbf{q}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{F}}_p \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

dza się do równań (31). Rozwiązanie takich równań można otrzymać przez bezpośrednie całkowanie numeryczne – na przykład rekurencyjną metodą β -Newmarka. Trudność numeryczną stanowi jednak pseudo-nieliniowość równań (31), niewidoczna w ich podstawowej strukturze (30).

W istocie, wszystkie bloki macierzy sztywności oznaczone nadpisaniem daszkiem są zależne od stanu przemieszczenia, czyli od współrzędnych uogólnionych, ponieważ występująca w tych blokach sztywność wieszaków k_{ij} jest zerowa przy ściskaniu. Za sztywność k_{ij} każdego wieszaka należy zatem podstawić zero, jeśli względne przemieszczenie jego końców ($v_{ij} - w_{ij}$) jest ujemne. W ten sposób algorytm całkowania równań staje się algorytmem rekurencyjno-iteracyjnym, gdyż w każdym kroku całkowania należy sprawdzać względne przemieszczenie każdego wieszaka i poprzez procedurę iteracyjną należy korygować bloki macierzy sztywności zależne od sztywności wieszaków. Symulacja numeryczna drgań sieci jezdnej i dynamicznych zmian sił nacisku stykowego pantografów jest w tej sytuacji bardzo czasochłonna.

Mimo tej niedogodności należy zauważyć, że zaproponowany w niniejszej pracy model obliczeniowy umożliwia znaczne zmniejszenie czasochłonności obliczeń w porównaniu ze standardowymi modelami tworzonymi w komercyjnych systemach MES. Prowadzi bowiem do dużo mniejszej liczby równań ruchu, a jak wiadomo, nakłady obliczeniowe związane z bezpośrednią symulacją numeryczną drgań rosną szybko ze wzrostem rozmiaru zadania, którego miarą jest właśnie liczba równań ruchu.

Zaproponowany model obliczeniowy, dzięki zastosowaniu ciągłego modelu ciężka nośnego i przewo-

du jezdnej uwzględnia nie tylko ciągły rozkład masy, ale także szereg innych specyficznych cech pracy ciężka. Uwzględnia wpływ statycznego zwisu zakrzywionego ciężka nośnego na jego reakcje sprężyste, przy równoczesnym dokładnym odwzorowaniu statycznej krzywej zwisu. Uwzględnia także wpływ poziomych składowych przemieszczeń ciężka i inercji masy ciężka związanej z tym ruchem a także poziome przesunięcia liny nośnej w punktach podparcia. Wprowadza w naturalny sposób, tzn. zgodnie z mechaniką ciężka, wstępny naciąg liny nośnej i przewodu jezdnej.

Uzyskanie podobnej dokładności modelowania przy użyciu MES jest bardzo trudne, wymaga bowiem zastosowania wielu elementów skończonych typu „ciągnowego” a dodać należy, że w praktycznych obliczeniach często są stosowane uproszczone „kratownicowe” elementy prętowe, co w zasadzie uniemożliwia osiągnięcie porównywalnej dokładności modelowania.

Testy numeryczne przedstawionego modelu obliczeniowego będą przedmiotem kolejnej publikacji, w tym weryfikacja modelu za pomocą tzw. modelu odniesienia opisanego w Załączniku A normy EN 50318 [2].

W dalszej przyszłości przewidywana jest walidacja opracowanej metody symulacji drgań górnej sieci jezdnej, na podstawie pomiarów drgań systemu nośnego wybranego odcinka napowietrznej, kolejowej sieci trakcyjnej. ◀

Materiały źródłowe

- [1] Rozporządzenie Komisji (UE) Nr 1301/2014 z dnia 18 listopada 2014 roku w sprawie technicznych specyfikacji interoperacyjności podsystemu „Energia” systemu kolei w Unii Europejskiej.
- [2] Norma PN-EN: 2003 „Zastosowania kolejowe - Systemy odbioru prądu - Walidacja symulacji oddziaływania dynamicznego pomiędzy pantografem a siecią jezdnią górną”.
- [3] Hajduk J., Osiecki J., Ustroje ciężka, teoria i obliczanie, WNT, Warszawa, 1970.
- [4] Jagiełło A. S., Dudzik M., Wpływ prędkości przemieszczenia się pantografu wzdłuż sieci jezdnej na układ odbierak prądu – sieć trakcyjna, Pomiar Automatyka Kontrola (PAK), vol. 59, nr 10, s. 1084– 1088, 2013.
- [5] Kaniewski M., Symulacja uniesienia przewodów jezdnych sieci trakcyjnej pod wpływem przejazdu wielu pantografów, Elektrotechnika - Czasopismo Techniczne, Wyd. Pol. Krakowskiej, r. 108, z. 13, s. 143-153, 2011,
- [6] Judek S., Karwowski K., Mizan M., Wilk A., Modelowanie współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną, Przegląd Elektrotechniczny, r. 91, nr 19, s. 248-253, 2015.
- [7] Wątroba P., Duda S., Gąsior D., Symulacje numeryczne zjawisk dynamicznych w układzie pantograf – sieć jezdna, Modelowanie Inżynierskie, nr 54, s. 94-100, 2015.
- [8] Frýba L., Dynamics of Railway Bridges, Academia Praha 1996.
- [9] Bryja D., Deterministyczne i stochastyczne metody analizy drgań mostów wiszących, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2005.
- [10] Bryja D., Knawa M., Computational model of an inclined aerial ropeway and numerical method for analysing nonlinear cable-car interaction, Computers & Structures, Civil Comp Ltd. and Elsevier Ltd., vol. 89, p. 1895-1905, 2011.
- [11] Langer J., Dynamika Budowli, Wyd. Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1980.