

Rozwój analitycznych i pół-analitycznych metod badania dynamiki dróg szynowych

Włodzimierz Czczuła, Piotr Kozioł



Prof. dr hab. inż. Włodzimierz Czczuła

Politechnika Krakowska im.
Tadeusza Kościuszki, Wydział
Inżynierii Lądowej

zczuła@pk.edu.pl



dr Piotr Kozioł

Politechnika Krakowska im.
Tadeusza Kościuszki, Wydział
Inżynierii Lądowej

pkoziol@pk.edu.pl

Analityczne metody rozwiązania równań ruchu, opisujących dynamiczną odpowiedź dróg szynowych stanowią wciąż atrakcyjny sposób badania tych zagadnień w odniesieniu do metod numerycznych. W rozumieniu autorów pół-analityczna metoda oznacza aproksymację funkcji, występujących w procedurze obliczeniowej. Dotyczy to w szczególności zastosowania szeregów Fouriera i teorii falkowej.

Obszerny przegląd badań, dotyczących dynamiki dróg szynowych znajduje się w pracach [5,6,19]. W artykule przedstawiono aktualny stan badań dynamiki dróg szynowych z zastosowaniem metod analitycznych i pół-analitycznych oraz wskazano główne kierunki rozwoju tych ujęć.

Droga szynowa jako struktura jednowarstwowa – tor bez imperfekcji

Najstarszy, a jednocześnie najczęściej stosowany model drogi szynowej, to pryzmatyczna, nieskończonej długości belka Eulera-Bernoulliego (reprezentująca szynę), spoczywająca na ciągłym, sprężystym, jednoparametrowym podłożu Winklera (opisującym przytwierdzenia, podkłady, podsypkę i podtorze), obciążona jedną siłą lub układem sił skupionych (modelującym pojazd szynowy), poruszających się ze stałą prędkością. Aby model ten mógł być przydatny do opisu dynamicznej odpowiedzi drogi szynowej należy przyjąć wiele założeń, z których najistotniejsze to:

1. Parametry mechaniczne drogi i obciążenia są symetryczne względem osi toru,
2. Parametry mechaniczne szyny i pozostałych elementów drogi szynowej są stałe wzdłuż toru,
3. Droga szynowa nie ma imperfekcji geometrycznych.

Model ten, w przypadku pojedynczej, jednostkowej siły $P=1$, opisuje znane równanie (por. np. [6,20]):

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Uy = (P=1)\delta(x,t) \quad (1)$$

gdzie:

EI – sztywność zginania belki (jednej szyny) [Nm^2];

m – masa jednostkowa szyny, z ewentualnym uwzględnieniem masy podkładu i warstw sypkich podłoża, aktywnie współdrżących (w fazie) z szyną [kg/m];

U – jednostkowa sztywność podłoża szyny [N/m^2];

$\delta(x,t)$ – dystrybucja Diraca;

x – położenie siły na szynie w czasie t [m].

Jeśli siły (siła) są stałe i poruszają się ze stałą prędkością v , to równanie (1) w ruchowym układzie współrzędnych ($\eta=y$, $\xi=x-vt$) otrzymuje postać równania zwyczajnego:

$$EI \frac{d^4 y}{d\xi^4} + mv^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2} + Uy = (P=1)\delta(\xi) \quad (2)$$

Klasyczny sposób rozwiązania równania (2) polega na uwzględnieniu - w rozwiązaniu równania jednorodnego – wartości siły jako warunku brzegowego. W przypadku wielu sił równanie (2) traktowane jest jako linia wpływowa ugięcia szyny. Chociaż uzyskane w ten sposób rozwiązanie jest, w dość dobrym stopniu, zgodne z danymi doświadczalnymi i innymi rozwiązaniami, tym niemniej budzi wątpliwości z matematycznego punktu widzenia. Problem ten przedstawiono w pracy [6]. Pokazano, że przyjmując znikanie ugięcia i jej pochodnych w plus/minus nieskończoności równanie jednorodne jest tożsamościowo równe zeru. Właściwym podejściem do problemu (2) jest rozwiązanie równania niejednorodnego, przy przyjęciu prawej strony jako siły lub układu sił rozłożonych $q(\xi)$ [N/m].

W ogólnym przypadku rozłożenia sił z uwzględnieniem dystrybucji Diraca, Heavisida, czy też innych, konwencjonalnych funkcji rozkładu, równanie niejednorodne

rozwiązuje się przy zastosowaniu transformaty Fouriera lub Laplace'a (por. [3,10]). W [6] pokazano, że przyjmując skończony przedział i rozwijając w szereg Fouriera obciążenie i rozwiązanie (de facto aproksymując funkcję obciążenia i przemieszczenia szyny przy pomocy skończonego szeregu Fouriera w skończonym, ale dostatecznie długim przedziale), uzyskuje się bardzo dobrą zgodność wyników z rozwiązaniem równania (2), które wykorzystywane jest jako klasyczna linia wpływowa dla szyny o nieskończonej długości.

W pracach [10,15,18] wykorzystano aproksymację falkową transformaty Fouriera w celu ułatwienia całkowania jej w nieskończonym przedziale (de facto pomijając dostatecznie małe wartości funkcji transformaty). Jest to oryginalny, szybki i dostatecznie dokładny sposób rozwiązania problemu.

Innym sposobem analizy dynamiki drogi szynowej z wykorzystaniem równania (2) jest ujęcie falowe [2].

Podstawowymi niedostatkami modelu, opisanego równaniem (2), są:

1. Pominięcie imperfekcji geometrycznych i mechanicznych,
2. Trudności w przyjęciu masy belki, tzn. wpływu warstw podłoża szynowego, czyli braku możliwości uwzględnienia drgań np. szyny i podkładu w przeciwną fazie.

Dlatego, w toku dalszych rozważań, przedstawimy uogólnienia modelu, z ograniczeniem do uzyskania rozwiązania z zastosowaniem metod analitycznych i quasi-analitycznych (z uwzględnieniem aproksymacji funkcji obciążenia i rozwiązania).

Imperfekcje, tłumienie, siła osiowa w szynach i modele wielowarstwowe

W najprostszym ujęciu zarówno imperfekcje geometryczne, jak i mechaniczne, analizuje się jako zastępcze nierówności na styku koła z szyną (por. np. [1,4]). W tych pracach i w wielu innych rozważano jedynie układy o parametrach skupionych.

W układach ciągłych (belkowych) równanie (1), z uwzględnieniem tłumienia i siły osiowej, przy rozłożonym, ruchomym obciążeniu zmiennym w czasie, ma postać (por. np. [6]):

$$EI \frac{\partial^4 y_r}{\partial x^4} + N_r \frac{\partial^2 y_r}{\partial x^2} + m_r \frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2} + c_r \frac{\partial y_r}{\partial t} + U y_r = q(x,t) \quad (3)$$

gdzie:

N_t – siła osiowa w szynie [N];

c_t – jednostkowy współczynnik wiskotycznego tłumienia podłoża szynowego [Ns/m²];

y_r – ugięcie szyny [m].

Jeśli obciążenie porusza się ze stałą prędkością v i jest harmonicznym zmiennym w czasie, tzn.

$$q(x, t) = \Delta P_c \cdot \cos \omega x + \Delta P_s \cdot \sin \omega x \quad (4)$$

gdzie:

$\Delta P_c, \Delta P_s$ – amplituda cosinusowej i sinusowej składowej siły,

ω – częstość kołowa [rad/s];

to równanie (3), w ruchomym układzie współrzędnych ($\eta = y, \xi = x - vt$), otrzyma postać (por. także [3,10]):

$$EI \frac{\partial^4 y_r}{\partial \xi^4} + N_t \frac{\partial^2 y_r}{\partial \xi^2} + m_r \left(\frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2} - 2v \frac{\partial^2 y_r}{\partial t \partial \xi} + v^2 \frac{\partial^2 y_r}{\partial \xi^2} \right) + c_r \left(\frac{\partial y_r}{\partial t} - v \frac{\partial y_r}{\partial \xi} \right) + U y_r = q(\xi, t). \quad (5)$$

Prawą stronę równania można przedstawić w postaci:

$$q(\xi, t) = q_c(\xi) \cdot \cos \omega x + q_s(\xi) \cdot \sin \omega x \quad (6)$$

Stacjonarne rozwiązanie równania (5), wobec oznaczeń (6), ma postać układu równań zwyczajnych (7):

Rozwiązanie problemu można uzyskać stosując transformatę Fouriera [3,10,15], bądź szereg Fouriera [6].

Dwuwarstwowy model drogi szynowej łatwo uzyskać poprzez wydzielenie podkładów i potraktowanie ich jako drugiej ciągłej warstwy drogi szynowej, pozbawionej zginania. Model ten opisuje układ równań (8) (por. np. [6,19]):

Gdzie:

(k_r, c_r) – sprężysto-lepka więź opisująca właściwości przytwierdzenia,

(k_p, c_p) – sprężysto-lepka więź opisująca właściwości podłoża podkładów,

m_r, m_p – jednostkowa masa szyny i podkładów

dów (ewentualnie wraz ze stowarzyszoną masą podsypki),

y_p – przemieszczenie podkładów, pozostałe oznaczenia jak w równaniu (3).

W ruchomym układzie współrzędnych, w zależności od tego, czy prawa strona jest zależna lub niezależna od czasu, uzyskujemy układ dwóch lub czterech równań zwyczajnych, które można rozwiązywać metodą transformaty lub szeregu Fouriera (por. np. [6,10]).

W pracy [6] pokazano, że przyjmując model dwuetapowy, tzn. wyznaczając w etapie I drgania szyny przy użyciu modelu opisanego równaniem (1) lub (3), a w etapie II drgania dowolnego, ustalonego podkładu przy wymuszeniu kinematycznym szyny otrzymanym w etapie I, uzyskuje się dobrą zgodność z rozwiązaniem równania (8). Zgodność ta dotyczy toru w dobrym stanie (tzn. przy niewielkich imperfekcjach).

Jeśli, dodatkowo, wyróżnimy masę podsypki, to uzyskamy model trzywarstwowy, który może być rozwiązywany opisanymi wyżej metodami. Model taki analizowano, przy użyciu metod numerycznych, np. w pracach [21].

W opisanych wyżej ujęciach szyna była modelowana jako belka Eulera (także opisywana jako belka Eulera-Bernoulliego). Inne typy belki, zwłaszcza Timoszenki, były analizowane w wielu pracach (np. [8,11,14,15,20]). Na ogół drgania belki Timoszenki opisywane są układem dwóch równań (por. np. [8,9,11,14,15]). W pracy [5] rozważano drgania szyny jako belki Timoszenki przy zastosowaniu, co prawda skomplikowanego, ale jednego równania różniczkowego. Równanie to ma postać (9):

Gdzie:

E – moduł Younga stali szynowej [N/m²];

I – moment bezwładności szyny [m⁴];

N – siła osiowa w szynie [N];

ρ – gęstość stali szynowej [kg/m³];

m – jednostkowa masa belki [kg/m];

κ – współczynnik ścinania przekroju poprzecznego szyny;

$$EI \frac{d^4 Y_c}{d\xi^4} - m_r \omega^2 Y_c - 2m_r v \omega Y_s + (N_t + m_r v^2) \frac{d^2 Y_c}{d\xi^2} + c_r \omega Y_s - c_r v \frac{dY_c}{d\xi} - U Y_c = q_c(\xi) \quad (7)$$

$$EI \frac{d^4 Y_s}{d\xi^4} - m_r \omega^2 Y_s + 2m_r v \omega Y_c + (N_t + m_r v^2) \frac{d^2 Y_s}{d\xi^2} - c_r \omega Y_c - c_r v \frac{dY_s}{d\xi} + U Y_s = q_s(\xi).$$

$$EI \frac{\partial^4 y_r}{\partial x^4} + N_t \frac{\partial^2 y_r}{\partial x^2} + m_r \frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2} + c_r \left(\frac{\partial y_r}{\partial t} - \frac{\partial y_p}{\partial t} \right) + k_r (y_r - y_p) = q(x, t) \quad (8)$$

$$m_p \frac{\partial^2 y_p}{\partial t^2} + c_p \frac{\partial y_p}{\partial t} + k_p y_p = c_r \left(\frac{\partial y_r}{\partial t} - \frac{\partial y_p}{\partial t} \right) + k_r (y_r - y_p)$$

$$EI \frac{\partial^4 y_r}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 y_r}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2} - \left(\frac{EI\rho}{\kappa G} + \rho I \right) \frac{\partial^4 y_r}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\kappa G} \frac{\partial^4 y_r}{\partial t^4} + R_p(x, t) = q_r(x, t) \quad (9)$$

$$R_p(x, t) = c \frac{\partial y_r}{\partial t} + c \frac{\rho I}{\kappa A G} \frac{\partial^3 y_r}{\partial t^3} - c \frac{EI}{\kappa A G} \frac{\partial^3 y_r}{\partial x^2 \partial t} + U y_r + U \frac{\rho I}{\kappa A G} \frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2} - U \frac{EI}{\kappa A G} \frac{\partial^2 y_r}{\partial x^2} \quad (10)$$

$$q_r(x, t) = q(x, t) + \frac{\rho I}{\kappa A G} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{EI}{\kappa A G} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

G – moduł ścinania stali szynowej [N/m²];

R_p – reakcja podłoża szyny [N/m];

q_r – zastępcze obciążenie [N/m].

Reakcję podłoża szyny R_p oraz zastępcze obciążenie q_r określają wyrażenia (10):

Gdzie:

c – jednostkowy współczynnik podłoża szynowego [Ns/m²];

A – pole powierzchni przekroju poprzecznego szyny [m²];

U – współczynnik podłoża szyny [N/m²] (por. równanie (1));

q – rzeczywiste obciążenie [N/m].

Dzięki takiemu ujęciu w pracy [5] wykazano, że obie belki są równoważne z uwagi na procedurę obliczeniową, przy zastosowaniu aproksymacji obciążenia i rozwiązania szeregiem Fouriera w skończonym przedziale. Dotyczy to wyłącznie sposobu rozwiązania, a nie uzyskanych wartości przemieszczeń szyny. W strukturach wielowarstwowych zastosowanie belki Timoszenki jeszcze bardziej komplikuje równania ruchu i sposób rozwiązania.

Inne uogólnienia i kierunki badań

Inne uogólnienia w modelach, ale z zachowaniem analitycznych metod rozwiązania, to w szczególności:

1. Uwzględnienie nieliniowej charakterystyki podłoża szynowego (zwłaszcza podsypki, ale także przytwierdzeń [9,11,15]);
2. Uwzględnienie stochastycznych właściwości podłoża szynowego [8,10,18];
3. Wprowadzenie półprzestrzeni sprężystej zamiast ciągłego podłoża sprężysto-lepkiego [16,17].

Zastosowanie metod aproksymacyjnych opartych na rozwinięciach falkowych oraz wykorzystujących dekompozycję odpowiedzi układu za pomocą tzw. wielomianów Adomiana pozwoliło uzyskać nowe rozwiązania dla wspomnianych uogólnionych modeli. Odpowiednio dobrane wartości parametrów sterujących w procedurach aproksymacyjnych dają rezultaty zbliżone do rzeczywistych pomiarów w szerokim zakresie parametrów fizycznych, zwłaszcza w przypadku modeli nieliniowych [12,13]. Wyniki badań parametrycznych dla drgań pionowych szyn i podkładów zostały jak dotąd porównane dla konfiguracji pojazdu EMU-250 Pendolino i badań eksperymentalnych przeprowadzonych na polskich liniach kolejowych [7]. W symulacjach tych uwzględniono skomplikowany model obciążenia składającego się z kilku sił skojarzonych z kołami pojazdu. Model ten uwzględnia realistyczny rozkład każdej z sił (funkcja cos2(.)) oraz ruch harmoniczny obciążenia generowany przez imperfekcje szyny wraz z przesunięciem fa-

zowym dla poszczególnych kół.

Aproksymacja całek Fouriera za pomocą filtrów typu „Coiflet” jest wydajną metodą pół-analityczną pozwalającą uniknąć całkowania numerycznego w przypadkach, gdzie klasyczne metody analityczne całkowania okazują się bezużyteczne. Ponadto, w przeciwieństwie do metod numerycznych, daje możliwość uchwycenia zmian układów dynamicznych o szybko zmieniających się w czasie właściwościach, jak dzieje się to np. w układach nieliniowych i stochastycznych poddanych obciążeniom poruszającym się z dużymi prędkościami (np. koleje dużych prędkości).

Rozważane model analityczne wciąż wymagają dodatkowych założeń uwzględniających nowe zjawiska pojawiające się wraz z rozwojem transportu szynowego. Takie dodatkowe założenia (uogólnienia) często prowadzą do rozbudowanych modeli, które nie mogą być rozwiązane przy użyciu znanych metod analitycznych. Dlatego, oprócz powszechnie stosowanych obliczeń MES wymagających rzetelnej weryfikacji w każdym rozważanym przypadku zastosowania, metody aproksymacyjne wskazywane są jako potencjalnie najlepsze narzędzie analizy dynamicznej odpowiedzi dróg szynowych, mogące w najbliższym czasie w sposób istotny poszerzyć istniejącą klasę rozwiązań analitycznych związanych z transportem kolejowym.

Podsumowanie

W artykule przedstawiono podstawowe problemy, związane z zastosowaniem analitycznych i pół-analitycznych metod badania dynamiki dróg szynowych, ze szczególnym uwzględnieniem prac, rozwijanych przez autorów. Badania te są ustawicznie rozwijane, a podstawowe kierunki rozwoju fizycznych modeli to:

1. Uwzględnienie nierównomiernego obciążenia obu szyn;
2. Badanie odpowiedzi w kierunku poziomym (wzdłużnie i poprzecznie do osi toru);
3. Sprzężenie drgań koła z szyną;
4. Uwzględnienie zmiennej prędkości pociągu (niestacjonarne rozwiązanie równań ruchu).

Rozwojowi metod fizycznych towarzyszy doskonalenie istniejących i opracowywanie nowych matematycznych metod rozwiązań i interpretacji równań dynamiki dróg szynowych. ◀

Materiały źródłowe

- [1] Basiewicz T., Nawierzchnia kolejowa na podkładach betonowych. WKiŁ, Warszawa, 1969.
- [2] Bogacz R., Dynamics of continuous systems subjected to traveling loads. *Applied Mechanics and Materials*, 2009, 9, 509-516.
- [3] Bogacz R., Krzyżyński T., O belce Bernoulliego-Eulera spoczywającej na lepkosprężystym podłożu poddanej działaniu ruchomego oscylacyjnego obciążenia. *Prace IPPT-PAN, Raport* 38, 1986.
- [4] Czyżula W., Analiza wpływu drgań nawierzchni kolejowej na deformacje podsypki. Praca doktorska, Kraków 1984.
- [5] Czyżula W., Blaszkiewicz D., On the equivalence between static and dynamic railway track response and on the Euler-Bernoulli and Timoshenko beams analogy, *Journal of Engineering Mathematics*, 2015 (w recenzji).
- [6] Czyżula W., Koziol P., Kudła D., Lisowski S. Analytical evaluation of track response in vertical direction due to moving load, *Journal of Vibration and Control*, 2015 (w recenzji).
- [7] Czyżula W., Tatara T. i inni, Badania drgań elementów nawierzchni, podłoża oraz propagacji drgań i hałasu w otoczeniu drogi kolejowej przy przejeździe pociągu EMU-250 (Pendolino). Raport Politechniki Krakowskiej, 2014.
- [8] Hryniewicz Z., Koziol P., Wavelet approach for analysis of dynamic response of Timoshenko beam on random foundation. *ICSV16, The Sixteenth International Congress on Sound and Vibration*, Kraków, 5-9 July 2009. Edited by M. Pawelczyk and D. Bismor, ISBN 978-83-60716-71-7, paper 421.
- [9] Kargarnovin M.H., Younesian D., Thompson D.J., Jones C.J.C., Response of beams on nonlinear viscoelastic foundations to harmonic moving loads. *Computers and Structures*, 2005, 83, 1865-1877.
- [10] Koziol P. Wavelet approach for the vibratory analysis of beam-soil structures: Vibrations of dynamically loaded systems. *VDM Verlag Dr. Müller, Saarbrücken*, 2010.
- [11] Koziol P., Vibrations generated by moving train: Coiflet approximation of nonlinear response. *Pojazdy Szynowe* 02/2014, ISSN 0138-0370.
- [12] Koziol P., Nonlinear response of railway track subjected to a moving train, *Proceedings of the ICEDYN 2015 International Conference on Structural Engineering Dynamics*, Lagos, Algarve, Portugal, 22-24 June 2015, Edited by N.M.M. Maia, M.M. Neves and R.P.C. Sampaio, ISBN 978-989-96276-9-7, paper K03.
- [13] Koziol P., Vibrations of railway tracks modelled as a two layer structure, in J. Kruis, Y. Tsompanakis, B.H.V. Topping, (Editors), *Proceedings of the Fifteenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing*, Civil-Comp Press, Stirlingshire, UK, Paper 199, 2015. doi:10.4203/ccp.108.199.
- [14] Koziol P., Hryniewicz Z., Dynamic response of Timoshenko beam resting on viscoelastic nonlinear foundation due to a moving load: wavelet-based solution. *ICEdyn2011, International Conference on Engineering Dynamics*, Tavira, Portugal, 20-22 June 2011, Edited by N.M.M. Maia, M.M. Neves and R.P.C. Sampaio, ISBN 978-989-96276-1-1, paper 99.
- [15] Koziol P., Hryniewicz Z. Dynamic response of a beam resting on a nonlinear foundation to a moving load: coiflet-based solution. *Shock and Vibration*, 2012, 19, 995-1007.
- [16] Koziol P., Mares C., Wavelet approach for vibration analysis of fast moving load on a viscoelastic medium. *Shock and Vibration*, 2010, 17 (4-5), 461-472.
- [17] Koziol P., Neves M.M., Multilayered infinite medium subject to a moving load: dynamic response and optimization using coiflet expansion. *Shock and Vibration*, 2012, 19, 1009-1018.
- [18] Koziol P., Mares C. Esat I. A wavelet approach for the analysis of bending waves in a beam on viscoelastic random foundation. *Proceedings of the 6th International Conference on Modern Practice in Stress and Vibration Analysis*, 5-6 September 2006, Bath, *Applied Mechanics and Materials*, ISBN 0-87849-418-9, 2006, 5-6, 239-246.
- [19] Sołkowski J., Efekt progowy w nawierzchniach szynowych. *Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki, Monografia* 435, Kraków, 2013.
- [20] Timoshenko S., Method of analysis of static and dynamic stresses in rail. *Proc. of 2nd Int. Congress on Applied Mechanics*, Zurich, 1926, 407-418.
- [21] Zhai W., Xia H., Cai C., Gao M., Li X., Guo X., Zhang N., Wang K., High-speed train-track-bridge dynamic interactions – Part I: theoretical model and numerical simulation, Part II: experimental validation and engineering application. *International Journal of Rail Transportation*, 2013, 1, (1-2), 3-24 and 25-41.