

Optymalizacja wielomianowych krzywych przejściowych z punktu widzenia wielkości zrywu

Krzysztof Zboiński, Piotr Woźnica



prof. dr hab. inż. Krzysztof Zboiński

Politechnika Warszawska, Wydział Transportu, Zakład Infrastruktury Transportu

kzb@wt.pw.edu.pl



dr inż. Piotr Woźnica

Politechnika Warszawska, Wydział Transportu, Zakład Infrastruktury Transportu

pwoznica@wt.pw.edu.pl

Przedmiotem badań autorów niniejszego artykułu są własności dynamiczne kolejowych wielomianowych krzywych przejściowych (KP) ([4]–[9]). We wcześniejszych swoich pracach [5] i [6] pokazali oni bardzo dobre własności dynamiczne wielomianowych krzywych przejściowych wyższych stopni wielomianu – 9. i 11. – z maksymalną liczbą wyrazów – odpowiednio 7 oraz 9. Jako kryterium oceny zastosowano tam minimalizację całki z przyspieszenia poprzecznego środka masy nadwozia pojazdu po długości drogi. Krzywizny znalezionych optymalnych krzywych nie posiadały jednak styczności w skrajnych – początkowym i końcowym – punktach krzywej do przebiegu funkcji krzywizny w torze prostym i łuku kołowym. Cechy te, uzyskane zarówno dla maksymalnej dopuszczalnej prędkości ruchu w łuku i jak prędkości mniejszej (gwarantującej uzyskanie równowagi oddziaływań poprzecznych na nadwozie), skłoniły autorów niniejszej pracy do zbadania, dlaczego załomy krzywizny otrzymanych krzywych przejściowych w owych punktach mają względnie mały wpływ na dynamikę pojazdu szynowego poruszającego się po takich krzywych.

Cel pracy

Celem niniejszej pracy jest pokazanie wyników optymalizacji krzywych przejściowych stopnia 5. i 7. z wykorzystaniem modelu pojazdu szynowego oraz kryteriów dynamicznych. Jako wspomniane kryteria zastosowano tu: znormalizowaną po długości drogi wartość całki z wartości bezwzględnej zmiany przyspieszenia poprzecznego nadwozia, tzw. zrywu (ang. jerk):

$$FC_1 = L_c^{-1} \int_0^{L_c} |\ddot{y}_b| dl \quad (1)$$

i wartość maksymalną z wartości bezwzględnej zmiany przyspieszenia poprzecznego nadwozia:

$$FC_2 = \max |\ddot{y}_b|. \quad (2)$$

We wzorach (1) i (2) przyjęto następujące oznaczenia: L_c – długość drogi uwzględnianej w obliczeniu funkcji celu,

$\ddot{y}_b$ – zmiana przyspieszenia poprzecznego środka masy nadwozia.

Autorzy pracy chcą sprawdzić, czy zastosowane nowe kryteria oceny pozwolą w procesie optymalizacji otrzymać tzw. gładkie krzywe przejściowe.

Model pojazdu szynowego

W badaniach wykorzystano model wagonu 2-osowego z jednym stopniem usprężynowania. Jak każdy wagon tego rodzaju posiada on nadwozie (pułdo) połączone z dwoma zestawami kołowymi za pomocą elementów sprężysto – tłumiących. Struktura modelu i jego parametry swoim zakresem odpowiadają typowemu 2-osowemu wagonowi rzeczywistemu. Model nominalny tego pojazdu przedstawiono na rys. 1a. Cały układ tor-pojazd, omówiono szczegółowo np. w [5] i [6], a przedstawiono go na rys. 1. W układzie zastosowano liniowość elementów zawieszenia pojazdu, tj. liniową sztywność i tłumienie.

Model pojazdu jest wyposażony w parę koła/szyna, której profile S1002/UIC60 odpowiadają rzeczywistym profilom używanym w całej Europie. Nieliniowa geometria tej pary

wprowadzana jest do modelu w postaci tzw. tablicy parametrów kontaktowych. Do obliczenia nieliniowych stycznych sił kontaktowych między kołem a szyną wykorzystano znany program FASTSIM autorstwa J.J. Kalkera.

Typ krzywej przejściowej przyjęty do analizy

Poszczególne parametry krzywej przedstawiono w postaci następujących równań:

$$y = \frac{I}{R} \left(\frac{A_n l^n}{l_0^{n-2}} + \frac{A_{n-1} l^{n-1}}{l_0^{n-3}} + \frac{A_{n-2} l^{n-2}}{l_0^{n-4}} + \frac{A_{n-3} l^{n-3}}{l_0^{n-5}} + \dots + \frac{A_2 l^2}{l_0^2} + \frac{A_1 l}{l_0} \right) \quad (3)$$

$$k = \frac{d^2 y}{dl^2} = \frac{I}{R} \left[n(n-1) \frac{A_n l^{n-2}}{l_0^{n-2}} + (n-1)(n-2) \frac{A_{n-1} l^{n-3}}{l_0^{n-3}} + \dots + 3 \cdot 2 \frac{A_2 l}{l_0} \right] \quad (4)$$

$$h = H \left[n(n-1) \frac{A_n l^{n-2}}{l_0^{n-2}} + (n-1)(n-2) \frac{A_{n-1} l^{n-3}}{l_0^{n-3}} + \dots + 4 \cdot 3 \frac{A_2 l^2}{l_0^2} + 3 \cdot 2 \frac{A_1 l}{l_0} \right] \quad (5)$$

$$i = \frac{dh}{dl} = H \left[n(n-1)(n-2) \frac{A_n l^{n-3}}{l_0^{n-2}} + (n-1)(n-2)(n-3) \frac{A_{n-1} l^{n-4}}{l_0^{n-3}} + \dots + 5 \cdot 4 \cdot 3 \frac{A_3 l^2}{l_0^2} + 4 \cdot 3 \cdot 2 \frac{A_2 l}{l_0} + 3 \cdot 2 \cdot 1 \frac{A_1}{l_0} \right] \quad (6)$$

gdzie oznaczenia: y , k , h , oraz i określają: współrzędną poprzeczną krzywej, krzywiznę, przechyłkę oraz pochylenie rampy przechyłkowej. Oznaczenia: R , H , l_0 oraz l określają: promień łuku kołowego, przechyłkę w łuku kołowym, całkowitą długość krzywej oraz bieżącą długość krzywej. Symbole A_i są współczynnikami wielomianu ($i = n, n-1, \dots, 4, 3$), gdzie n jest stopniem wielomianu. Jeśli przyjmie, że liczba wyrazów wielomianu nie może być mniejsza niż 2, to najmniejszy stopień $n_{\min}$ ostatniego wyrazu w równaniu (3) musi być nie mniejszy niż 3 ($n_{\min} \geq 3$). W tej pracy $n=5$ oraz $n=7$.

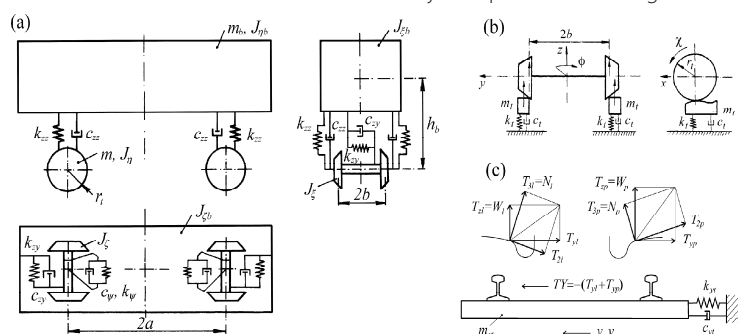
Na funkcję krzywizny krzywej przejściowej nałożono podstawowy warunek, jaki musi spełniać funkcja krzywizny w punktach początkowym i końcowym, tj. $k(0)=0$ i $k(l_0)=1/R$. Analogiczny warunek spełnia też rampa przechyłkowa, tzn. $h(0)=0$ i $h(l_0)=H$, np. [3].

Schemat oprogramowania przyjętego w badaniach

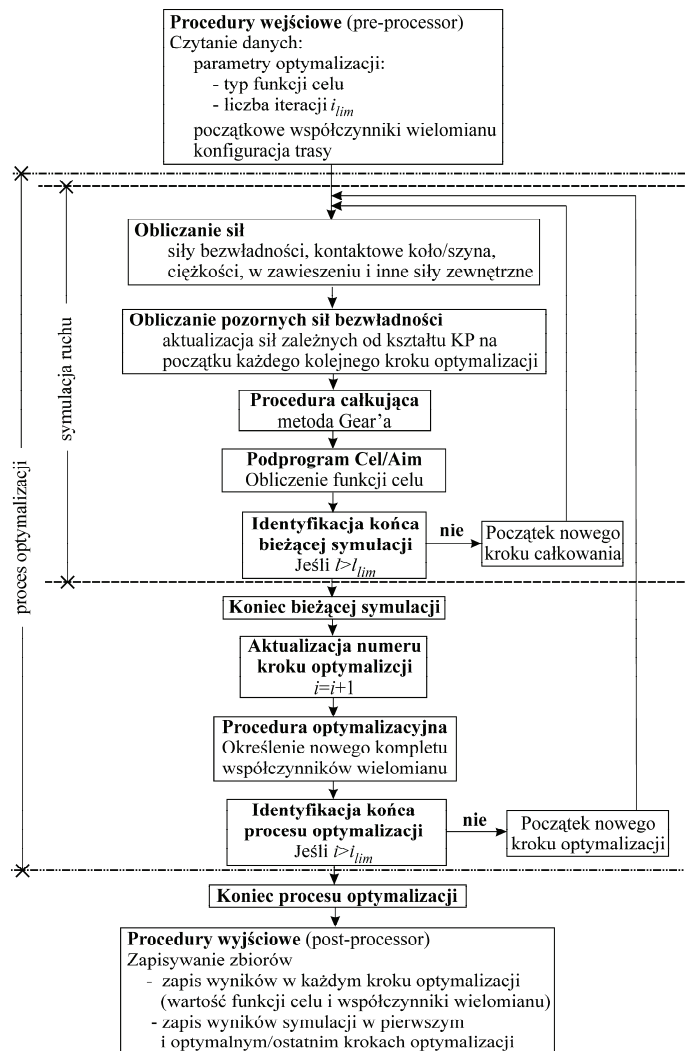
Schemat oprogramowania przedstawiono na rys. 2. Są na nim widoczne dwie pętle iteracyjne. Pierwsza jest pętlą całkowania równań (symulacji). Jest ona przerywana, gdy długość $l_{\lim}$, będąca długością bieżącej drogi, osiągnie założoną wartość. Druga zaś jest pętlą procesu optymalizacji. Jest przerywana, gdy liczba iteracji osiągnie wartość $i_{\lim}$. Wartość ta oznacza, że $i_{\lim}$ symulacji musi zostać wykonywanych, aby proces optymalizacyjny został zakończony. Jeśli optymalne rozwiązanie zostanie znalezione wcześniej ($i < i_{\lim}$), wtedy proces optymalizacyjny zostanie automatycznie zatrzymany.

Podstawowe informacje o kp stopnia 5 i 7.

Każda wielomianowa krzywa przejściowa stop-



1. Struktura modelu obiektu 2-osowego przyjętego do analizy:
a) wagon, b) model pionowy toru, c) model poprzeczny toru



2. Schemat oprogramowania do optymalizacji

nia nieparzystego, także 5. i 7., ma tzw. krzywą wzorcową (początkową w procesie optymalizacji). Algorytm otrzymania takich krzywych przedstawiony jest szczegółowo w [5]. Funkcja i pochylenia rampy przechyłkowej (wzór (6)) krzywych wzorcowych posiada maksimum w punkcie $l/2$ (połowie długości krzywej) i jest symetryczna względem pionowej osi przechodzącej przez ten punkt. Równania wzorcowych krzywych przejściowych stopni 5. i 7. przedstawiono w tabeli 1.

We wszystkich badaniach przedstawionych w pracy przyjęto jedną wartość promienia łuku kołowego $R=600$ m i przechyłki $H=0,15$ m.

Każda krzywa przejściowa ma minimalną długość, która liczona jest zgodnie z metodą przedstawioną w [1]. Ta minimalna długość wynika z wymagania dotyczącego nieprzekroczenia dwu wartości podczas przejazdu przez krzywą przejściową. Pierwszą z wartości jest prędkość nierównoważonego przyspieszenia poprzecznego ψ . Drugą zaś jest prędkość podnoszenia się koła po rampie przechyłkowej f . Do obliczenia długości przyjęto następujące wartości: $\psi = 1$ m/s³ i $f = 56$ mm/s ([1]). Warto tu zauważyć, że o ile pierwszy wzór dotyczy pudła wagonu, o tyle drugi – zestawów kołowych. Wartość prędkości podnoszenia się koła

na rampie przechyłkowej $f_{dop} = 56$ mm/s nie jest dopuszczalna w warunkach polskich ani jako graniczna wartość zasadnicza, ani jako wartość wyjątkowa [2]. Może być ona stosowana wyłącznie do badań teoretycznych.

W pracy przyjęto dwie prędkości pojazdu - $v=24,26$ m/s, gwarantującą równowagę między składowymi siłami odśrodkowej i siły grawitacji w płaszczyźnie toru w łuku kołowym ($a_{dop}=0$ m/s²) i $v=30,79$ m/s - gwarantującą maksymalne dopuszczalne nierównoważone przyspieszenie poprzeczne $a_{dop}=0,6$ m/s². Obliczone długości KP przedstawiono w tabeli 2.

Wyniki optymalizacji kształtu kp

Wyniki poszczególnych procesów optymalizacji składają się z: optymalnych współczynników wielomianu, wartości funkcji celu, graficznej reprezentacji krzywej i krzywizny, przemieszczenia oraz przyspieszenia środka masy nadwozia i ich zmian.

W tej pracy prezentację wyników ograniczono do pokazania przebiegów dynamicznych – przemieszczeń i przyspieszeń środka masy nadwozia i przedniego zestawu kołowego i ich zmian, a także optymalnych krzywych przejściowych i ich krzywizn.

Celem niniejszego rozdziału jest pokazanie wstępnych wyników badań dotyczących optymalizacji kształtu krzywych przejściowych z wykorzystaniem modelu pojazdu oraz kryteriów FC_1 i FC_2 . Na potrzeby niniejszego rozdziału wykonano optymalizację krzywych przejściowych stopnia 5. i 7. Każda pojedyncza symulacja wchodząca w skład optymalizacji polegała na przejeździe pojazdu po trasie składającej się z toru prostego (50 m), krzywej przejściowej i łuku kołowego (100 m). Jako krzywe przejściowe początkowe w procesie optymalizacji wykorzystano krzywe stopnia 5. i 7. z tabeli 1.

Zasadniczo wyniki optymalizacji - przemieszczenia i przyspieszenia środków mas zestawów kołowych i nadwozia – miały podobny jakościowy charakter dla każdego z dwu badanych stopni wielomianu. Dlatego w niniejszym rozdziale autorzy przedstawili wyniki optymalizacji tylko dla jednego stopnia wielomianu – 5 i prędkości pojazdu 30.79 m/s.

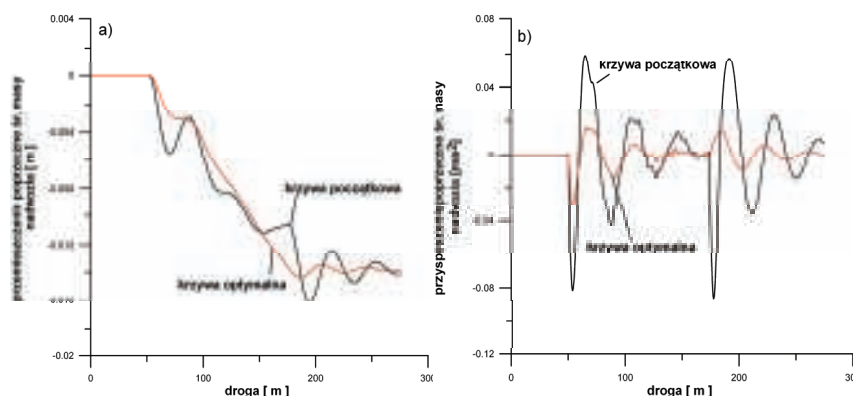
Rysunek 3 przedstawia przebiegi dynamiczne (kryterium FC_1) – przemieszczenia i przyspieszenia poprzeczne środka masy nadwozia pojazdu po optymalizacji poruszającego się z

Tab. 1. Lista krzywych wzorcowych (początkowych)

Stopień wielomianu	Krzywa wzorcową (początkową) INI
5.	$y = \frac{1}{R} \left(-\frac{l^5}{10 l_0^3} + \frac{l^4}{4 l_0^2} \right)$
7.	$y = \frac{1}{R} \left(\frac{l^7}{7 l_0^5} - \frac{l^6}{2 l_0^4} + \frac{l^5}{2 l_0^3} \right)$

Tab. 2. Długości krzywych przejściowych

Stopień wielomianu	długość l_0 [m] ($v=24,26$ m/s)	długość l_0 [m] ($v=30,79$ m/s)
5.	97,47	123,74
7.	121,84	154,68



3. Przebiegi dynamiczne (kryterium FC_1) – a) przemieszczenia, b) przyspieszenia poprzeczne środka masy nadwozia

prędkością $v=30,79$ m/s. Rysunek 4 przedstawia przyspieszenia poprzeczne środka masy przedniego zestawu kołowego i zmianę przyspieszeń poprzecznych środka masy nadwozia. Rysunek 5 przedstawia przebiegi dynamiczne (kryterium FC_2) – przyspieszenia poprzeczne środka masy nadwozia i zmianę przyspieszeń poprzecznych środka masy nadwozia ($v=30,79$ m/s). Przykładowe krzywe optymalne i ich krzywizny (5. stopień, $v=30,79$ m/s, FC_1 , FC_2) pokazano na rys. 6. Analizując przebiegi dynamiczne z rysunku 3, 4 i 5 (kryterium FC_1 i FC_2), widać, że przebiegi te po optymalizacji dla nadwozia pojazdu mają zdecydowanie łagodniejszy charakter niż dla krzywej początkowej. Wjazd środka masy nadwozia w strefę krzywej odbywa się jednak zawsze z pewnym opóźnieniem. Łagodniejszy przebieg zmiany przyspieszenia poprzecznego środka masy nadwozia dla krzywej optymalnej jest pokazany na rys. 4b. Analizując krzywizny optymalnych krzywych przejściowych z rys. 6b widać, że krzywizny te nie posiadają stycznych w skrajnych punktach – początkowym i końcowym – krzywej przejściowej. Krzywizna otrzymana dla kryterium FC_2 przypomina liniową krzywiznę dla paraboli 3. stopnia. Krzywizny te zaś w strefie środkowej krzywej mają jednak łagodniejsze przebiegi niż krzywa początkowa.

Stosunek wartości funkcji celu dla krzywej optymalnej do wartości funkcji celu dla krzywej wzorcowej 5. (przy takiej samej prędkości pojazdu i długości krzywej) wynosi $0,28=(0.088303 \text{ [m/s}^2\text{]}/0.31311 \text{ [m/s}^2\text{]})$.

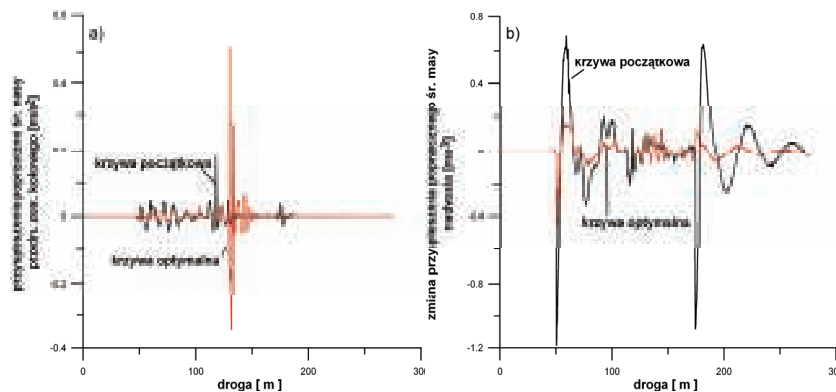
Wnioski

Autorzy pracy pokazali, że optymalizacja kształtu krzywych przejściowych z wykorzystaniem pojazdu kryteriów dotyczących zrywu – FC_1 i FC_2 – jest możliwa. Kryteria dotyczące zrywu dają poprawę własności dynamicznych – przemieszczeń i przyspieszeń – nadwozia i zaliczają się do grupy kryteriów dobrze uwarunkowanych, gwarantujących poprawę funkcji celu z jednoczesną poprawą własności dynamicznych układu. W pracy otrzymano krzywe dające mniejsze wartości funkcji celu niż krzywe wzorcowe (tab. 6.1). Krzywizny otrzymanych krzywych optymalnych nie posiadały jednak – tak samo jak w poprzednich pracach – stycznych w skrajnych punktach – początkowym i końcowym. Otrzymane krzywe optymalne stopni 5. i 7. posiadały załomy krzywizny w skrajnych punktach, mimo że procedura optymalizacyjna mogła znaleźć tzw. krzywe gładkie, tj. takie, których krzywizny są styczne we wspomnianych punktach.

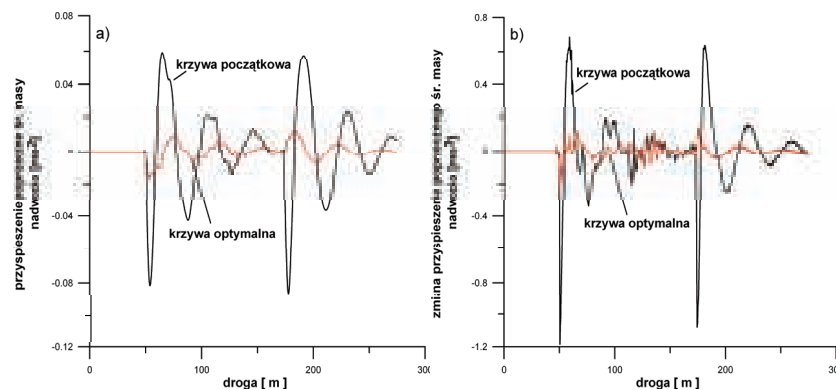
Praca potwierdziła wcześniejsze wyniki autorów, że wykorzystanie pełnego modelu pojazdu daje inne wyniki (krzywe z brakiem stycznych krzywizny) niż sprowadzenie pojazdu do punktu, jak to ma miejsce w praktyce inżynierskiej. ◀

Materiały źródłowe

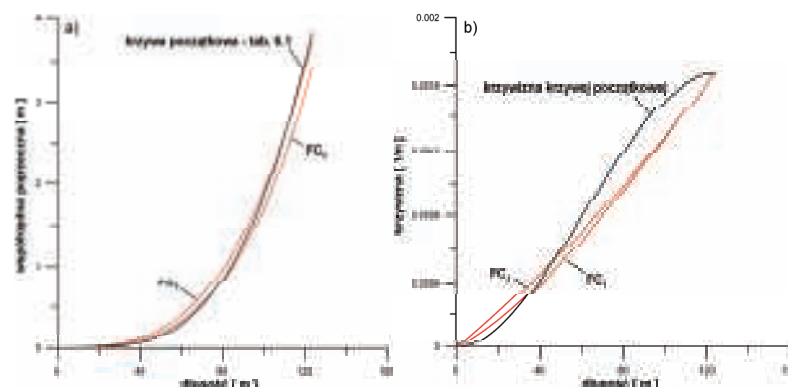
- [1] Koc W., Radomski R. Analiza krzywych przejściowych z nieliniowymi rampami



4. Przebiegi dynamiczne (kryterium FC_1): a) przyspieszenia poprzeczne środka masy przedniego zestawu kołowego, b) zmiana przyspieszenia poprzecznego środka masy nadwozia



5. Przebiegi dynamiczne (kryterium FC_2): a) przyspieszenia poprzeczne środka masy nadwozia, b) zmiana przyspieszenia poprzecznego środka masy nadwozia



6. a) Optymalne krzywe przejściowe (kryterium FC_1 oraz FC_2) porównane z krzywą początkową, b) ich krzywizny

- przechylkowymi. Drogi Kolejowe, 11, str. 261-267, 1985.
- [2] Rozporządzenie MTiGM w sprawie warunków technicznych, jakim powinny odpowiadać budowle kolejowe i ich usytuowanie - Dz.U. nr 151 poz. 987, 1998 r. z późn. zm. Dz.U. poz. 867, 2014 r.
- [3] Sysak J. Drogi Kolejowe. PWN, Warszawa, 1982.
- [4] Zboirski K., Woźnica P. Formation of Railway Transition Curves based on Advanced Dynamic Vehicle Models. B.H.V. Topping, J.M. Adam, F.J. Pallarés, R. Bru, M.L. Romero, Proc. of the Tenth International Conference on Computational Structures Technology, Civil-Comp Press, Stirlingshire, 2010.
- [5] Woźnica P. Kształtowanie i ocena własności kolejowych krzywych przejściowych z wykorzystaniem metod optymalizacji i symulacji. Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Wydział Transportu, Warszawa 2012.
- [6] Zboirski K. Nieliniowa dynamika pojazdów szynowych w łuku. WNITE, Warszawa-Radom 2012.
- [7] Zboirski K., Woźnica P. Optimisation of Railway Polynomial Transition Curves: A Method and Results. In J. Pombo, (Editor), Proceedings of the First International Conference on Railway Technology: Research, Development and Maintenance, Civil-Comp Press, Stirlingshire, 2012.
- [8] Zboirski K., Woźnica P. Optimisation of the railway transition curves' shape with use of vehicle-track dynamical model. Archives of Transport, 22(3), str. 387-407, 2010.
- [9] Zboirski K., Woźnica P. Optimisation of railway polynomial transition curves with different number of terms. Logistics&Transport, vol. 2, nr 2, 2014.