

Badanie niegładkich kolejowych krzywych przejściowych typu wielomianowego z wykorzystaniem kryteriów zużyciowych

Krzysztof Zboiński, Piotr Woźnica



Prof. dr hab. inż. Krzysztof Zboiński

Politechnika Warszawska, Wydział Transportu, Zakład Infrastruktury Transportu

kzb@wt.pw.edu.pl



dr inż. Piotr Woźnica

Politechnika Warszawska, Wydział Transportu, Zakład Infrastruktury Transportu

pwoznica@wt.pw.edu.pl

Autorzy artykułu od kilku lat szeroko badają własności dynamiczne kolejowych wielomianowych krzywych przejściowych (KP) ([9]-[15]). W pracach [11] i [12] pokazali oni bardzo dobre własności dynamiczne wielomianowych krzywych przejściowych wyższych stopni wielomianu - 9. i 11. - z maksymalną liczbą wyrazów – odpowiednio 7 oraz 9. Jako kryterium oceny zastosowano tam minimalizację całki z przyspieszenia poprzecznego środka masy nadwozia pojazdu po długości drogi. Krzywizny znalezionych optymalnych krzywych nie posiadały stycznych w skrajnych – początkowym i końcowym – punktach krzywej do przebiegu funkcji krzywizny w torze prostym i łuku kołowym. Cechy te, uzyskane zarówno dla maksymalnej dopuszczalnej prędkości ruchu w łuku i jak prędkości mniejszej (gwarantującej uzyskanie równowagi oddziaływań poprzecznych na nadwozie), skłoniły autorów niniejszej pracy do zbadania, dlaczego załomy krzywizn otrzymanych krzywych przejściowych w owych punktach mają względnie mały wpływ na dynamikę pojazdu szynowego poruszającego się po takich krzywych [9].

W pracy [9] jej autorzy postawili następującą hipotezę badawczą: W rzeczywistości wjazd nadwozia w KP odbywa się zawsze stopniowo, w odróżnieniu od modeli pozbawionych długości (np. punkt reprezentujący nadwozie), gdzie wjazd ma charakter skokowy. Środek masy nadwozia znajduje się bowiem zawsze na cięciwie wyznaczonej przez środki mas zestawów kołowych (pojazd 2-osiowy) lub środki ram wózków (pojazd 4-osiowy). Nadwozie rozpoczyna ruch nieprostoliniowy, spowodowany zakrzywieniem toru już w momencie

wjazdu przedniego zestawu kołowego w KP. Wydaje się zatem, że fakt ten może mieć działanie łagodzące. Należy zauważyć, że działanie tego rodzaju ustaje całkowicie dopiero w momencie wjazdu tylnego zestawu kołowego w KP. Aby zweryfikować w/w hipotezę (główny cel pracy), autorzy pracy zmieniali stopniowo – zwiększali i zmniejszali – bazę pojazdu, tj. odległość pomiędzy osiami zestawów kołowych pojazdu [9].

Cel pracy

Praca [9] pokazała, że zwiększenie i zmniejszenie odległości pomiędzy osiami zestawów kołowych pojazdu 2-osiowego nie wpłynęło na zlikwidowanie załomów w krzywiznach krzywych przejściowych przy wykorzystaniu kryterium minimalizacji całki z przyspieszenia poprzecznego środka masy nadwozia pojazdu. Wjazd środka masy nadwozia pojazdu odbywa się zawsze z opóźnieniem w stosunku do przedniego zestawu kołowego. Skracając odległość oczekiwano „swoistego wygładzenia” funkcji krzywizny w skrajnych punktach, ale nic takiego nie miało miejsca. Wydłużenie pojazdu zaś powoduje łagodniejszy ruch zestawów kołowych.

Celem niniejszej pracy jest pokazanie wyników optymalizacji krzywych przejściowych stopnia 9. i 11. z wykorzystaniem modelu pojazdu szynowego o zmiennej bazie oraz – tym razem – kryteriów zużyciowych. Jako wspomniane kryteria zastosowano tu: wartość maksymalną z sumy wartości bezwzględnych sum iloczynów sił kontaktowych stycznych wzdłużnych i poprzecznych przez odpowiadające im poślizgi względne dla wszystkich kół.

$$FC_1 = \max(|F_{1lp}v_{1lp} + F_{2lp}v_{2lp}| + |F_{1rp}v_{1rp} + F_{2rp}v_{2rp}| + |F_{1lk}v_{1lk} + F_{2lk}v_{2lk}| + |F_{1rk}v_{1rk} + F_{2rk}v_{2rk}|) \quad (1)$$

i wartość maksymalną z sumy wypadkowych poślizgów względnych dla wszystkich kół:

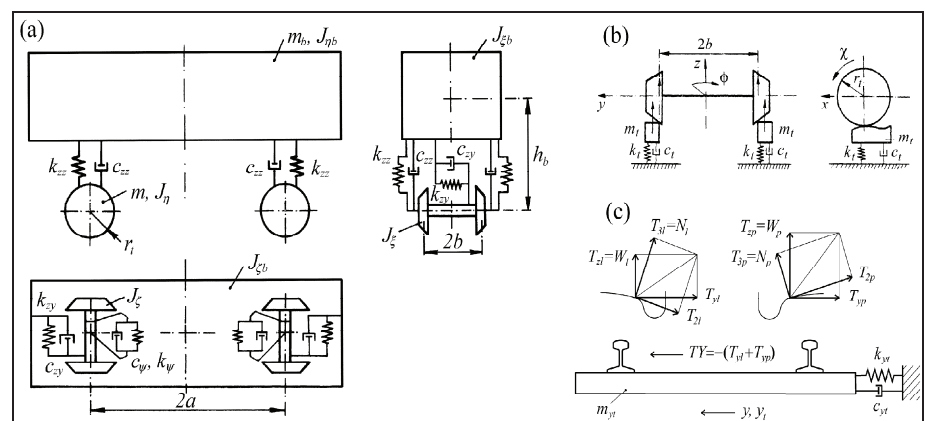
$$FC_2 = \max(\sqrt{v_{1lp}^2 + v_{2lp}^2} + \sqrt{v_{1rp}^2 + v_{2rp}^2} + \sqrt{v_{1lk}^2 + v_{2lk}^2} + \sqrt{v_{1rk}^2 + v_{2rk}^2}) \quad (2)$$

We wzorach (1) i (2) przyjęto następujące oznaczenia: v_i – poślizg względny wzdłużny w układzie koło-szyna, v_z – poślizg względny poprzeczny w układzie koło-szyna, F_i – wzdłużna styczna siła kontaktowa w układzie koło-szyna, F_z – poprzeczna styczna siła kontaktowa w układzie koło-szyna. Indeksy l, r, p, k oznaczają odpowiednio: stronę lewą, stronę prawą, przedni (atakujący) zestaw kołowy i końcowy (wleczony) zestaw.

Zawarte w użytych kryteriach (1) i (2) wyrażenia wykorzystywane są powszechnie w starszych [2], [3], [4] i współczesnych [5], [6] pracach dotyczących wyznaczania zużycia pary koło-szyna. Autorzy pracy chcą sprawdzić, czy wykorzystanie kryteriów innych niż we wcześniejszych pracach spowoduje likwidację opisanych wyżej załomów w krzywiznach.

Model pojazdu

W badaniach wykorzystano model wagonu 2-osiowego z jednym stopniem usprężynowania. Jak każdy wagon tego rodzaju posiada on nadwozie (pudło) połączone z dwoma zestawami kołowymi za pomocą elementów sprężysto – tłumiących. Struktura modelu i jego parametry swoim zakresem odpowiadają



1. Struktura modelu obiektu 2-osiowego przyjętego do analizy: a) wagon, b) model pionowy toru, c) model poprzeczny toru

typowemu 2-osiowemu wagonowi rzeczywistemu. Model nominalny tego pojazdu przedstawiono na rys. 1a. Cały układ tor-pojazd, omówiono szczegółowo w [11] i [12], a przedstawiono go na rys. 1. W układzie zastosowano liniowość elementów zawieszenia pojazdu, tj. liniową sztywność i tłumienie.

Model pojazdu jest wyposażony w parę koło/szyna, której profile S1002/UIC60 odpowiadają rzeczywistym profilom używanym w całej Europie. Nieliniowa geometria tej pary wprowadzana jest do modelu w postaci tzw. tablicy parametrów kontaktowych. Do obliczenia nieliniowych stycznych sił kontaktowych między kołem a szyną wykorzystano znany program FASTSIM autorstwa J.J. Kalkera.

W rzeczywistości w badaniach wykorzystano 3 modele – każdy z inną odległością między osiami zestawów kołowych (bazą pojazdu). Odległość ta (wartość $2a$ z rys. 1a) wynosi odpowiednio – 1 m, 6,32 m i 9 m. Wartość bazy 6,32 m wynika z tego, że wykorzystany pierwotnie model jest odwzorowaniem rzeczywistego modelu brytyjskiego wagonu kolejowego.

Wykorzystanie modeli pojazdu z różnymi odległościami między osiami zestawów ma na celu zbadanie wpływu bazy na dynamikę pojazdu – przemieszczenia i przyspieszenia środka masy nadwozia i zestawów kołowych – zwłaszcza w początkowym i końcowym odcinku krzywej przejściowej.

Typ krzywej przejściowej przyjęty do analizy

Poszczególne parametry krzywej przedstawiono w postaci następujących równań (3), (4), (5), (6). Oznaczenia: y , k , h , oraz i określają: współrzędną poprzeczną krzywej, krzywiznę, przechyłkę oraz pochylenie rampy przechyłkowej. Oznaczenia: R , H , l_0 oraz l określają: promień łuku kołowego, przechyłkę w łuku kołowym, całkowitą długość krzywej oraz bieżącą długość krzywej. Symbole A_i są współczynnikami wielomianu ($i = n, n-1, \dots, 4, 3$), gdzie n jest stopniem wielomianu. Jeśli przyjmując, że liczba wyrazów wielomianu nie może być mniejsza niż 2, to najmniejszy stopień n_{min} ostatniego

Tab. 1. Lista krzywych wzorcowych (początkowych)

Stopień wielomianu	Krzywa wzorcowa (początkowa) INI
9.	$y = \frac{1}{R} \left(-\frac{5}{18} \frac{l^9}{l_0^9} + \frac{5}{4} \frac{l^8}{l_0^8} - 2 \frac{l^7}{l_0^7} + \frac{7}{6} \frac{l^6}{l_0^6} \right)$
11.	$y = \frac{1}{R} \left(\frac{7}{11} \frac{l^{11}}{l_0^{11}} - \frac{7}{2} \frac{l^{10}}{l_0^{10}} + \frac{15}{2} \frac{l^9}{l_0^9} - \frac{15}{2} \frac{l^8}{l_0^8} + 3 \frac{l^7}{l_0^7} \right)$

Tab. 2. Długości krzywych przejściowych

Stopień wielomianu	długość l_0 [m] ($v=24,26$ m/s)	długość l_0 [m] ($v=30,79$ m/s)
9.	142,15	180,46
11.	159,86	202,94

wyrazu w równaniu (3) musi być nie mniejszy niż 3 ($n_{min} \geq 3$). W tej pracy $n=9$ oraz $n=11$.

Na funkcję krzywizny krzywej przejściowej nałożono podstawowy warunek, jaki musi spełniać funkcja krzywizny w punktach początkowym i końcowym, tj. $k(0)=0$ i $k(l_0)=1/R$. Analogiczny warunek spełnia też rampa przechyłkowa, tzn. $h(0)=0$ i $h(l_0)=H$, np. [8].

Schemat orpogramowania przyjętego w badaniach

Schemat oprogramowania przedstawiono na rys. 2. Są na nim widoczne dwie pętle iteracyjne. Pierwsza jest pętlą całkowania równań (symulacji). Jest ona przerywana, gdy długość $l_{lim'}$ będąca długością bieżącej drogi, osiągnie założoną wartość. Druga zaś jest pętlą procesu optymalizacji. Jest przerywana, gdy liczba iteracji osiągnie wartość i_{lim} . Wartość ta oznacza, że i_{lim} symulacji musi zostać wykonywanych, aby proces optymalizacyjny został zakończony. Jeśli optymalne rozwiązanie zostanie znalezione wcześniej ($i < i_{lim}$), wtedy proces optymalizacyjny zostanie automatycznie zatrzymany.

Podstawowe informacje o kp stopni nieparzystych

Każda wielomianowa krzywa przejściowa stopnia nieparzystego ma tzw. krzywą wzorcową (początkową w procesie optymalizacji). Algorytm otrzymania takich krzywych przed-

stawiony jest szczegółowo w [11]. Funkcja i pochylenia rampy przechyłkowej (wzór (6)) krzywych wzorcowych posiada maksimum w punkcie $l_0/2$ (połowie długości krzywej) i jest symetryczna względem pionowej osi przechodzącej przez ten punkt. Równania wzorcowych krzywych przejściowych stopni 9. i 11. przedstawiono w tabeli 1.

We wszystkich badaniach przedstawionych w pracy przyjęto jedną wartość promienia łuku kołowego $R=600$ m i przechyłki $H=0,15$ m. Każda krzywa przejściowa ma minimalną długość, która jest obliczana zgodnie z metodą przedstawioną w [1]. Ta minimalna długość wynika z wymagania dotyczącego nieprzekroczenia dwu wartości podczas przejazdu przez krzywą przejściową. Pierwszą z wartości jest prędkość niezrównoważonego przyspieszenia poprzecznego ψ . Drugą zaś jest prędkość podnoszenia się koła po rampie przechyłkowej f . Do obliczenia długości przyjęto następujące wartości: $\psi=1$ m/s³ i $f=56$ mm/s ([1]). Warto tu zauważyć, że o ile pierwszy wzór dotyczy pudła wagonu, o tyle drugi – zestawów kołowych. W pierwszym przypadku długość bazy poprawia parametry jazdy po krzywej przejściowej, w drugim – nie ma ona znaczenia. Wartość prędkości podnoszenia się koła na rampie przechyłkowej $f_{dop}=56$ mm/s nie jest dopuszczalna w warunkach polskich ani jako graniczna wartość zasadnicza, ani jako wartość wyjątkowa [7]. Może być ona stosowana wyłącznie do badań teoretycznych.

W pracy przyjęto dwie prędkości pojazdu – $v=24,26$ m/s, gwarantującą równowagę między składowymi przyspieszenia odśrodkowego i siły grawitacji w płaszczyźnie toru w łuku kołowym ($a_{dop}=0$ m/s²) i $v=30,79$ m/s – gwarantującą maksymalne dopuszczalne niezrównoważone przyspieszenie poprzeczne $a_{dop}=0,6$ m/s². Obliczone długości KP przedstawiono w tabeli 2.

Wyniki procesów optymalizacji

Ogólnie rzecz biorąc, na wyniki z poszczególnych procesów optymalizacji składają się optymalne współczynniki wielomianu, wartości funkcji celu, graficzna reprezentacja krzywej i krzywizny oraz przemieszczenia i

$$y = \frac{1}{R} \left(\frac{A_n l^n}{l_0^{n-2}} + \frac{A_{n-1} l^{n-1}}{l_0^{n-3}} + \frac{A_{n-2} l^{n-2}}{l_0^{n-4}} + \frac{A_{n-3} l^{n-3}}{l_0^{n-5}} + \dots + \frac{A_4 l^4}{l_0^2} + \frac{A_3 l^3}{l_0^1} \right) \quad (3)$$

$$k = \frac{d^2 y}{dl^2} = \frac{1}{R} \left[n(n-1) \frac{A_n l^{n-2}}{l_0^{n-2}} + (n-1)(n-2) \frac{A_{n-1} l^{n-3}}{l_0^{n-3}} + \dots + 3 \cdot 2 \frac{A_3 l^1}{l_0^1} \right] \quad (4)$$

$$h = H \left[n(n-1) \frac{A_n l^{n-2}}{l_0^{n-2}} + (n-1)(n-2) \frac{A_{n-1} l^{n-3}}{l_0^{n-3}} + \dots + 4 \cdot 3 \frac{A_4 l^2}{l_0^2} + 3 \cdot 2 \frac{A_3 l^1}{l_0^1} \right] \quad (5)$$

$$i = \frac{dh}{dl} = H \left[n(n-1)(n-2) \frac{A_n l^{n-3}}{l_0^{n-2}} + (n-1)(n-2)(n-3) \frac{A_{n-1} l^{n-4}}{l_0^{n-3}} + \dots + 5 \cdot 4 \cdot 3 \frac{A_5 l^2}{l_0^3} + 4 \cdot 3 \cdot 2 \frac{A_4 l^1}{l_0^2} + 3 \cdot 2 \cdot 1 \frac{A_3 l^0}{l_0^1} \right] \quad (6)$$

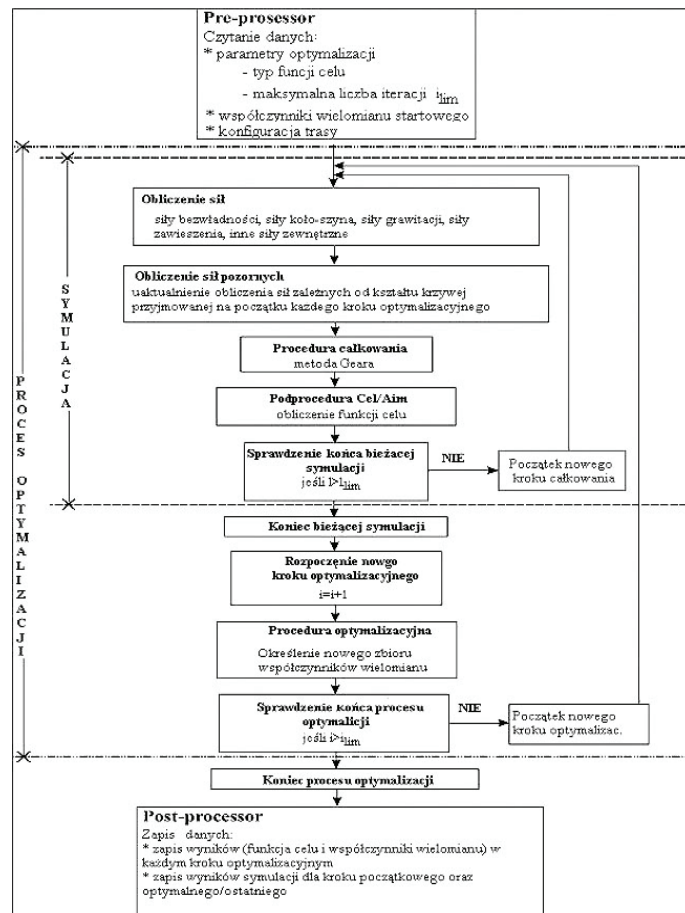
przyspieszenia środka masy nadwozia. W tej pracy prezentację wyników ograniczono do pokazania przebiegów dynamicznych – przemieszczeń i przyspieszeń środka masy nadwozia i obu zestawów kołowych, a także krzyżwn optymalnych krzywych przejściowych. Do badań przyjęto, jak już wspomniano, promień łuku kołowego $R=600$ m, przechyłkę w łuku $H=0,15$ m, maksymalną prędkość podnoszenia się koła po rampie przechyłkowej $f_{dop}=56$ mm/s [1]. Jako prędkość v pojazdu przyjęto dwie wartości. Pierwszą – 24,26 m/s, gwarantującą idealnie zrównoważone przyspieszenie poprzeczne środka masy nadwozia w płaszczyźnie toru oraz – 30,79 m/s, gwarantującą osiągnięcie w tej płaszczyźnie maksymalnego dopuszczalnego niezrównoważonego przyspieszenia poprzecznego $0,6 \text{ m/s}^2$. Długość krzywej przejściowej l_0 dla danego stopnia przyjęto zgodnie z tab. 2.

Celem niniejszego rozdziału jest pokazanie wyników badań dotyczących optymalizacji kształtu krzywych przejściowych z wykorzystaniem modeli pojazdu o różnej bazie oraz kryteriów zużyciowych FC_1 i FC_2 , a także wpływu zmiany bazy pojazdu na dynamikę pojazdu poruszającego się po danej krzywej przejściowej. Na potrzeby niniejszego rozdziału wykonano 24 optymalizacje. Każda pojedyncza symulacja wchodząca w skład optymalizacji polegała na przejeździe pojazdu po trasie składającej się z toru prostego (50 m), krzywej przejściowej i łuku kołowego (100 m). Jako krzywe przejściowe początkowe w procesie optymalizacji wykorzystano krzywe stopnia 9. i 11. z tabeli 1. Stąd wspomniana liczba 24 symulacji to iloczyn 2 stopni wielomianu, 2 prędkości pojazdu, 3 odległości między zestawami kołowymi (1 m; 6,32 m i 9 m) oraz 2 kryteriów oceny.

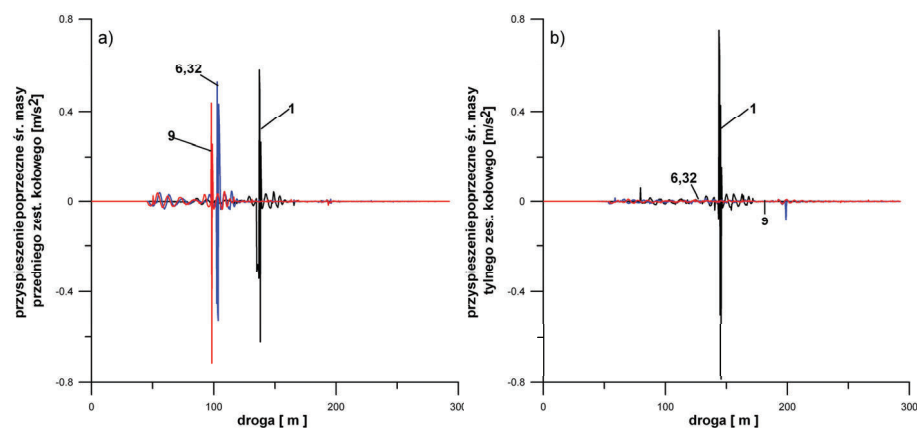
Zasadniczo wyniki optymalizacji – przemieszczenia i przyspieszenia środków mas zestawów kołowych i nadwozia – miały podobny jakościowo charakter dla każdego z dwu badanych stopni wielomianu. Dlatego w niniejszym rozdziale autorzy przedstawili wyniki optymalizacji tylko dla jednego stopnia wielomianu – 9.

Rysunek 3 przedstawia przyspieszenia środka masy przedniego i tylnego zestawu kołowego pojazdu po optymalizacji poruszającego się z prędkością $v=24,26 \text{ m/s}$ (FC_2). Rysunek 4 przedstawia zaś przyspieszenia poprzeczne środka masy nadwozia i przemieszczenia poprzeczne środka masy tylnego zestawu kołowego dla kryterium FC_2 i $v=24,26 \text{ m/s}$. Na każdym z rysunków przedstawiono po 3 przebiegi – każdy dla pojazdu z konkretną odległością (bazą) między osiami zestawów kołowych (1 m; 6,32 m i 9 m).

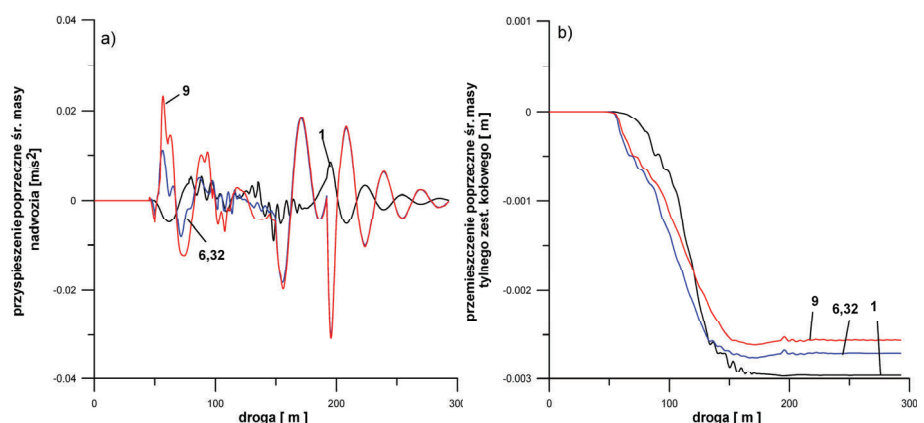
Rysunek 5 przedstawia przyspieszenia poprzeczne środka przedniego zestawu kołowego pojazdu oraz przyspieszenia poprzeczne środka masy nadwozia (kryterium FC_1 i $v=30,79 \text{ m/s}$). Na każdym z rysunków przed-



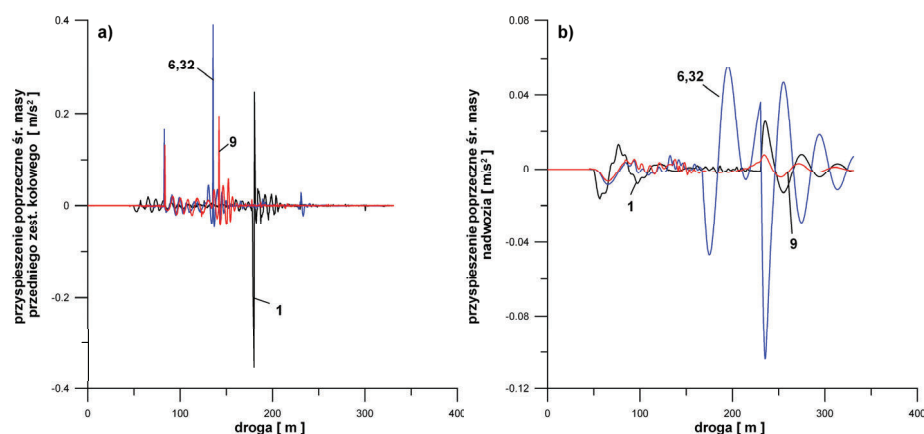
2. Schemat oprogramowania do optymalizacji



3. Przebiegi dynamiczne (kryterium FC_2) – przyspieszenia poprzeczne środka masy; a) przedniego, b) tylnego zestawu kołowego



4. Przebiegi dynamiczne (kryterium FC_2): a) przyspieszenia poprzeczne środka masy nadwozia, b) przemieszczenia poprzeczne środka masy tylnego zestawu kołowego



5. Przebiegi dynamiczne (kryterium FC1): a) przyspieszenia poprzeczne środka masy przedniego zestawu kołowego, b) przyspieszenia poprzeczne środka masy nadwozia

stawiono po 3 przebiegi – każdy dla pojazdu z konkretną odległością (bazą) między osiami zestawów kołowych (1 m; 6,32 m i 9 m).

W znakomitej większości wykonanych optymalizacji najlepsze „zachowania” dynamiczne przedniego i tylnego zestawu kołowego – najmniejsza liczba pików – oraz nadwozia pojazdu osiągnięto dla pojazdu z najdłuższą – dziewięciometrową bazą. Jest to potwierdzone przez rys. 3b, 4b oraz 5. Fakt ten tłumaczy się tym, że dłuższy pojazd łagodniej wchodzi w strefę krzywej przejściowej. Łagodniejsze przebiegi mają miejsce zwłaszcza tylne zestawy kołowe pojazdu, które jako ostatnie wchodzi w krzywą przejściową. Na podkreślenie zasługuje fakt, że w pracy, przy ocenie krzywych przejściowych, wykorzystano kryteria zużyciowe. Optymalne krzywe przejściowe dają mniejsze zużycie w kontakcie koło-szyna niż krzywe początkowe w procesie optymalizacji. Dają także lepsze przebiegi dynamiczne poszczególnych elementów pojazdu.

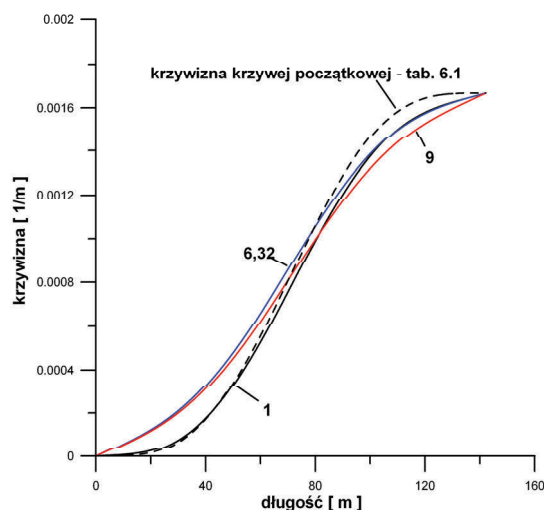
Przykładowe krzywizny optymalnych krzywych przejściowych (9. stopień, $v=24,26$ m/s, FC_2), dających lepszą dynamikę i mniejsze zużycie w kontakcie koło-szyna przedstawiono na rys. 6. W każdym procesie optymalizacji wykorzystano krzywą z tab. 1. Dla trzech róż-

nych baz otrzymano trzy różne krzywe, a tym samym i trzy różne krzywizny.

Wnioski

Autorzy pracy pokazali, że optymalizacja kształtu krzywych przejściowych z wykorzystaniem pojazdu o zmiennej bazie i kryteriów zużyciowych – FC_1 i FC_2 – jest możliwa. Otrzymano krzywe dające mniejsze wartości funkcji celu niż krzywe z tab. 1. Krzywe te, oprócz zmniejszenia zużycia w kontakcie koło-szyna, dawały lepszą dynamikę poszczególnych elementów pojazdu. Dla różnych baz pojazdów – 1 m, 6,32 i 9 m – otrzymano różne krzywe przejściowe. Porównując przebiegi – przemieszczenia i przyspieszenia środków mas – otrzymane dla różnych baz widać, że są one najlepsze dla pojazdu z najdłuższą 9-metrową bazą. Zmiana bazy nie wpłynęła także na likwidację załomów krzywizn w punkcie początkowym i końcowym.

Praca potwierdziła wcześniejsze wyniki autorów, że wykorzystanie pełnego modelu pojazdu daje inne wyniki (krzywe z brakiem styczności krzywizny) niż sprowadzenie pojazdu do punktu, jak to ma miejsce w praktyce inżynierskiej. ◀



6. Krzywizny optymalnych krzywych przejściowych (kryterium FC2)

Materiały źródłowe

- [1] Koc W., Radomski R. Analiza krzywych przejściowych z nieliniowymi rampami przechyłkowymi. Drogi Kolejowe, 11, str. 261-267, 1985.
- [2] Choromański W., Zboiński. Application of multibody software to wheel and rail profiles modification. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej. Transport. z. 34, 1995.
- [3] Choromański W., Zboiński. Optimization of wheel and rail profiles for various conditions of motion. Vehicle System Dynamics, 20 (suppl.), 1992.
- [4] Fries R., Davila C. Wheel wear prediction for tangent track Running. J. of Dyn. Syst., Measur. and Control, vol. 109, 1987.
- [5] Lewis R., Dwyer-Joyce R. Wear mechanics and transitions in railway wheel steels, Journal Engineering Tribology, 218, 2004.
- [6] Pombo J., Ambrosio J., Pereira M., Lewis R., Dwyer-Joyce R., Ariado C., Kuka N. A railway wheel wear prediction tool based on a multibody software. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 48, 3, Warsaw, 2010.
- [7] Rozporządzenie MTiGM w sprawie warunków technicznych, jakim powinny odpowiadać budowle kolejowe i ich użytkowanie - Dz.U. nr 151 poz. 987, 1998 r. z późn. zm. Dz.U. poz. 867, 2014 r.
- [8] Sysak J. Drogi Kolejowe. PWN, Warszawa, 1982.
- [9] Zboiński K., Woźnica P. Badanie kolejowych krzywych przejściowych z nieliniowymi krzywiznami. Pojazdy Szynowe nr 2, Poznań, 2014.
- [10] Zboiński K., Woźnica P. Formation of Railway Transition Curves based on Advanced Dynamic Vehicle Models. B.H.V. Topping, J.M. Adam, F.J. Pallarés, R. Bru, M.L. Romero, Proc. of the Tenth International Conference on Computational Structures Technology, Civil-Comp Press, Stirlingshire, 2010.
- [11] Woźnica P. Kształtowanie i ocena własności kolejowych krzywych przejściowych z wykorzystaniem metod optymalizacji i symulacji. Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Wydział Transportu, Warszawa 2012.
- [12] Zboiński K. Nieliniowa dynamika pojazdów szynowych w łuku. WNITE, Warszawa-Radom 2012.
- [13] Zboiński K., Woźnica P. Optimisation of Railway Polynomial Transition Curves: A Method and Results. In J. Pombo, (Editor), Proceedings of the First International Conference on Railway Technology: Research, Development and Maintenance, Civil-Comp Press, Stirlingshire, 2012.
- [14] Zboiński K., Woźnica P. Optimisation of the railway transition curves' shape with use of vehicle-track dynamical model. Archives of Transport, 22(3), str. 387-407, 2010.
- [15] Zboiński K., Woźnica P. Optimisation of railway polynomial transition curves with different number of terms. Logistics&Transport, vol 2, nr 2, 2014.